



**Università degli Studi di Roma “La Sapienza”**  
**Facoltà di Ingegneria**  
*Dipartimento di Meccanica ed Aeronautica*

**Corso di Laurea Triennale in**  
*Ingegneria Meccanica*

***Elaborato di***  
***Meccanica delle Strutture***

**Docente**

*Prof. Giuseppe Ruta*

**Studente**

*Daniele Cortis*





## Indice

### Capitolo 1

<b>Strutture di elementi monodimensionali intelaiati .....</b>	<b>5</b>
1.1 Introduzione .....	5
1.2 Descrizione del telaio .....	7
1.3 Soluzione del problema attraverso il metodo degli spostamenti .....	8
<b>Instabilità dell'equilibrio elastico.....</b>	<b>23</b>
2.1 Introduzione .....	23
2.2 Sistema comportamento post-critico simmetrico stabile .....	25
2.3 Sistema comportamento post-critico simmetrico instabile .....	31
2.4 Telaio a comportamento post-critico simmetrico stabile .....	38
<b>Elementi strutturali bidimensionali .....</b>	<b>46</b>
3.1 Introduzione .....	46
3.2 Descrizione del sistema.....	51
3.3 Piastra con carico uniformemente ripartito su due rettangoli parziali .....	52
<b>Metodi probabilistici per le verifiche strutturali .....</b>	<b>64</b>
4.1 Introduzione .....	64
4.2 Descrizione delle struttura.....	66
4.3 Calcolo delle sollecitazioni agenti .....	67
4.4 Metodo deterministico (Livello 0).....	72
4.5 Metodo semi-probabilistico (Livello 1) .....	73
4.6 Metodo probabilistico (Livello 2) .....	76
<b>    Bibliografia: .....</b>	<b>78</b>

## ||| Capitolo 1:

### Strutture di elementi monodimensionali intelaiati

#### 1.1 Introduzione

I gradi di libertà di un sistema meccanico rappresentano il numero di coordinate generalizzate necessarie e sufficienti a descriverne la configurazione. Un sistema che possiede  $g$  gradi di libertà potrà dunque disporsi in  $\infty^g$  differenti configurazioni. Come è noto nello spazio a tre dimensioni un sistema meccanico possiede 6 gradi di libertà e  $\infty^6$  differenti configurazioni.

I sistemi iperstatici, essendo vincolati in modo sovrabbondante, sono indeterminati dal punto di vista statico. Ciò significa, che tali sistemi possono essere equilibrati da  $\infty^{v-g}$  differenti insiemi di sollecitazioni reattive, essendo  $v$  il numero di gradi di vincolo e  $(v-g)$  il grado di iperstaticità della struttura. D'altra parte va segnalato che, se i vincoli non sono disposti in maniera opportuna, essi perdono la loro efficacia, facendo risultare labili sistemi apparentemente isostatici o iperstatici.

La soluzione dei sistemi iperstatici attraverso il *Metodo delle Forze* consiste nell'individuare quell'unico insieme di sollecitazioni reattive che, oltre all'equilibrio, implichi anche la congruenza, ovvero il rispetto dei vincoli interni ed esterni, nonostante le deformazioni indotte negli elementi strutturali. Dal punto di vista operativo, tale metodo consiste nell'eliminare  $(v-g)$  gradi di vincolo, così da ridurre la struttura assegnata ad un sistema isostatico e nell'applicare a tale sistema, oltre che le sollecitazioni esterne, le reazioni vincolari incognite esplicate dai vincoli soppressi. Le  $(v-g)$  equazioni di congruenza imporranno allora volta il rispetto delle condizioni cinematiche relative ai vincoli soppressi, e, una volta risolte, forniranno le  $(v-g)$  reazioni esplicate da tali vincoli, le quali sono dette incognite iperstatiche. Le equazioni di congruenza che formano detto sistema di equazioni vengono dette di Müller-Breslau.

Il *Metodo degli Spostamenti* è considerato il duale del Metodo delle Forze. Esso consiste nell'individuare quell'unico insieme di parametri cinematici che, oltre alla congruenza, implichi anche l'equilibrio. Dal punto di vista operativo, tale metodo consiste nell'imporre alcuni spostamenti o rotazioni, caratteristici del sistema, in alcuni punti della

struttura detti *nodi*, in modo tale che le  $(v-g)$  reazioni iperstatiche soddisfino le  $(v-g)$  relazioni di equilibrio.

Quest'ultimo metodo risulta particolarmente indicato per l'analisi di strutture ad elevato grado di iperstaticità. Infatti, contrariamente al Metodo delle Forze, il Metodo degli Spostamenti non risulta appesantito dall'aumento del grado di iperstaticità della struttura; al contrario, l'aumento del grado di iperstaticità comporta una semplificazione del sistema di equazioni di equilibrio.

Il Metodo degli Spostamenti si presta ad una rappresentazione formale di tipo vettoriale e quindi ad una implementazione in codice di analisi automatica: esso rappresenta il prototipo dell'analisi matriciale delle strutture dai cui sono nati i moderni metodi agli elementi finiti (FEM = Finite Element Method). Questo risulta il vantaggio più rilevante del Metodo degli Spostamenti in confronto al Metodo delle Forze.

Il *Metodo agli Elementi Finiti* si prefigura quindi come il cuore di numerosi software per il calcolo strutturale

### 1.2 Descrizione del telaio

In questo capitolo verrà studiato l'andamento delle sollecitazioni a cui è sottoposta la struttura di figura 1.2. Tale struttura può rappresentare il generico telaio di un carroponete installato in un qualsiasi impianto industriale.

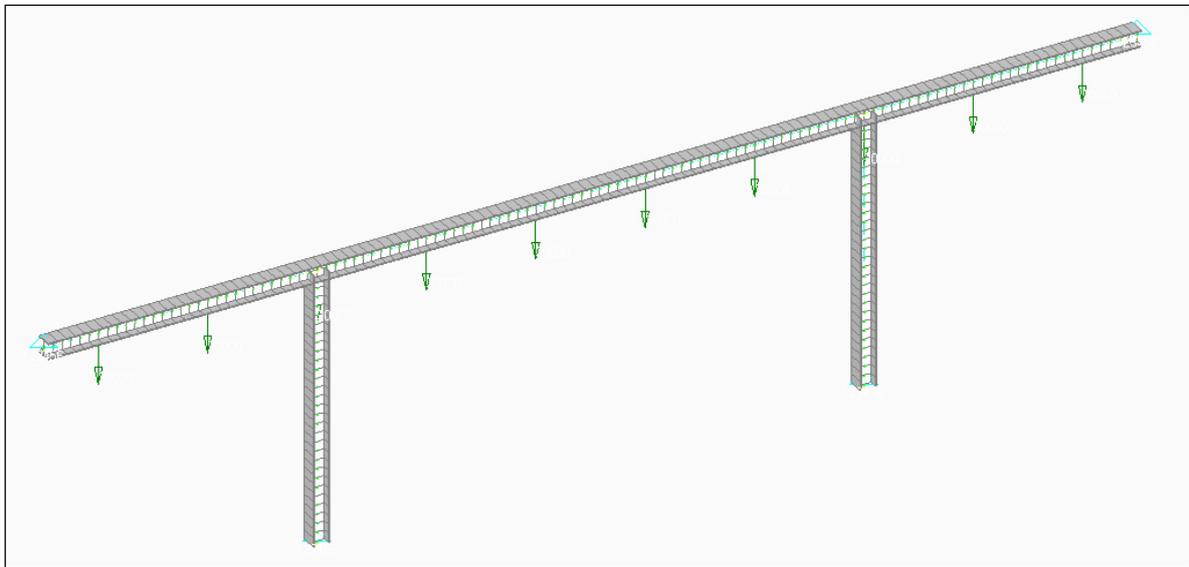


Figura 1.2

La struttura può essere schematizzata con un telaio composto da tre travi (figura 1.3). La trave AD è disposta orizzontalmente lungo l'asse  $x$ , ha una lunghezza di  $4L$ , è incastrata nei punti A e D e soggetta ad un carico ripartito  $p$  diretto lungo l'asse  $y$  con verso negativo. Le travi BE e CF sono disposte verticalmente lungo l'asse  $y$  a sostegno della trave AD, hanno una lunghezza pari ad  $L$  e sono incastrate nei punti E ed F. Il grado di iperstaticità della struttura risulta pari a 9.

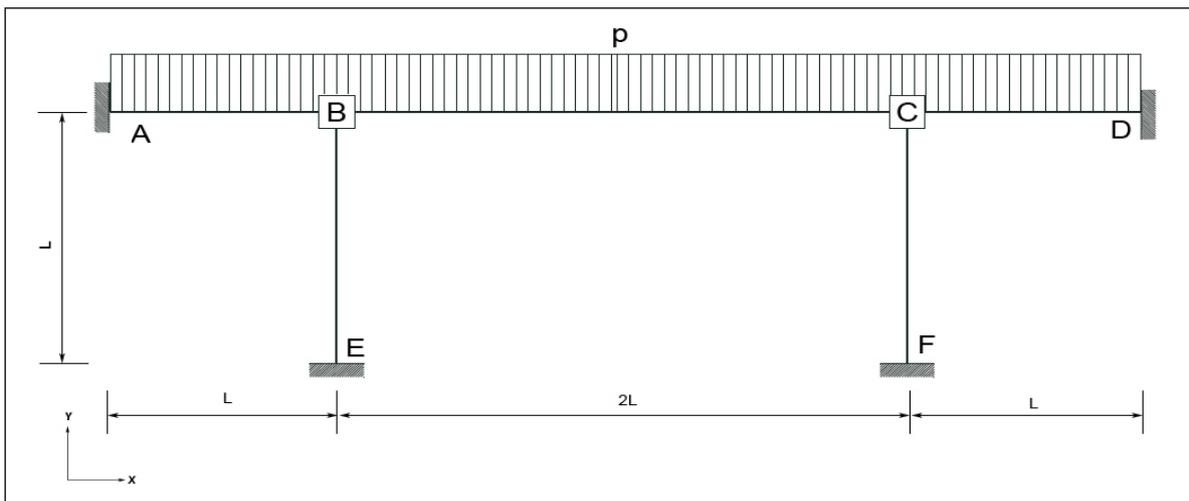


Figura 1.3



### 1.3 Soluzione del problema attraverso il metodo degli spostamenti

La soluzione del problema viene effettuata attraverso il metodo degli spostamenti, poiché l'elevato grado di iperstaticità della struttura e la sua simmetria ne favoriscono l'impiego rispetto al metodo delle forze, ove il numero di incognite sarebbe maggiore.

Ipotizzando che le travi siano puramente flessibili, cioè inestensibili ed indeformabili a taglio (Bernoulli – Euler), la struttura viene considerata a nodi fissi, cioè i nodi sono liberi di ruotare elasticamente ma non di traslare.

La prima operazione consiste nel risolvere il sistema "0" ottenuto bloccando tutti i nodi del telaio. Per fare ciò ci si riconduce al caso elementare di incastro perfetto (figura 1.4) e si ricavano le reazioni vincolari esplicitate dagli incastri.

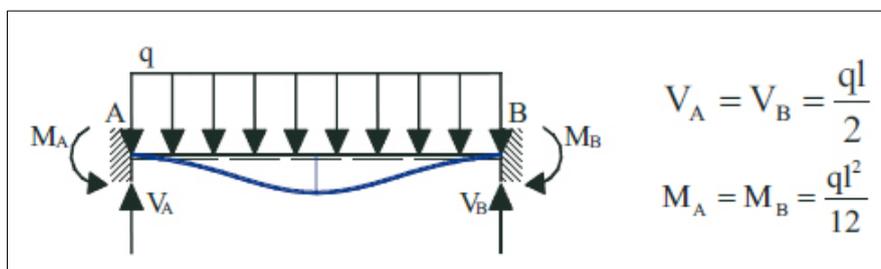


Figura 1.4

Successivamente vengono risolti i sistemi "1" e "2" ottenuti di volta in volta imponendo le rotazioni dei nodi B e C. Anche in questo caso si ottengono le reazioni vincolari che esplicano gli incastri riconducendosi al caso elementare di figura 1.5.

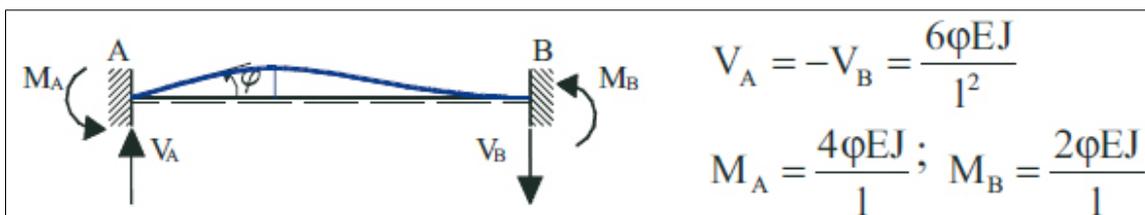


Figura 1.5

Come ultima operazione si impone l'equilibrio dei momenti ai nodi, ottenendo un sistema di 2 equazioni in 2 incognite. Risolvendo tale sistema si otterranno fra le infinite soluzioni congruenti gli unici valori delle rotazioni che garantiscono l'equilibrio.

Una volta ottenute tali rotazioni, si calcolano attraverso il principio di sovrapposizione degli effetti i valori del momento flettente ( $M$ ), del taglio ( $T$ ) e dello sforzo normale ( $N$ ) ai nodi.

### Sistema "0" - Nodi bloccati

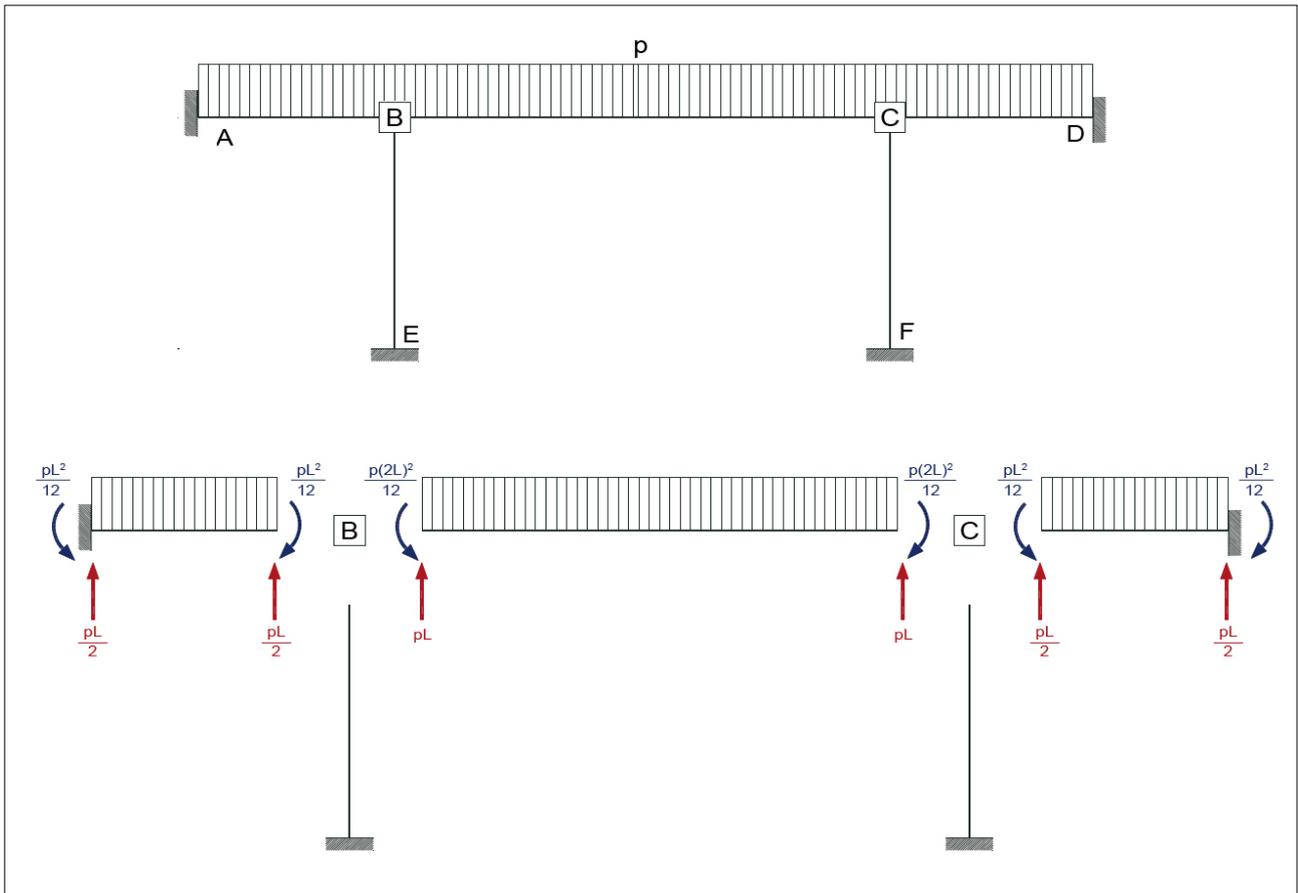


Figura 1.6

### Sistema "1" - Rotazione del nodo B

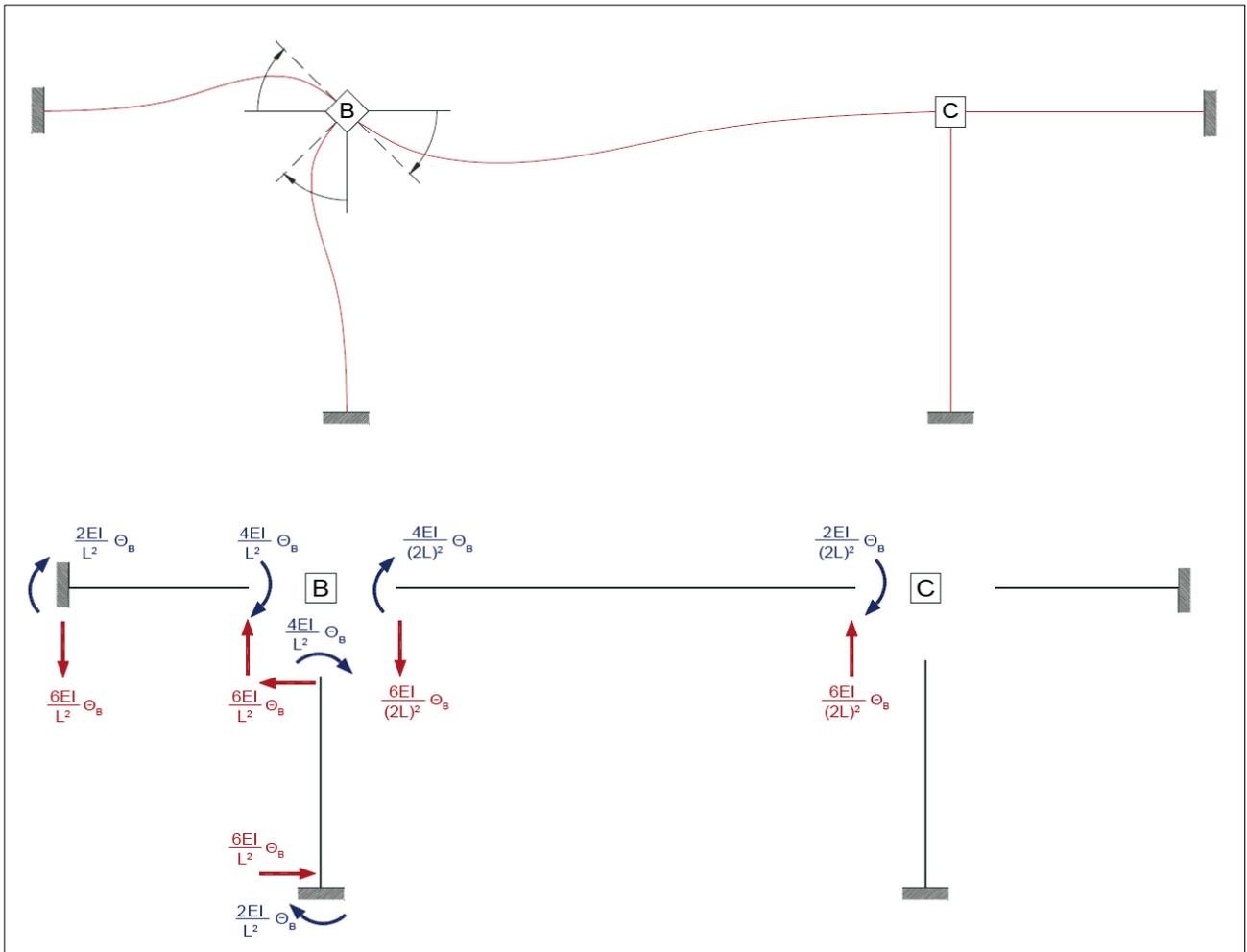


Figura 1.7

### Sistema "2" - Rotazione del nodo C

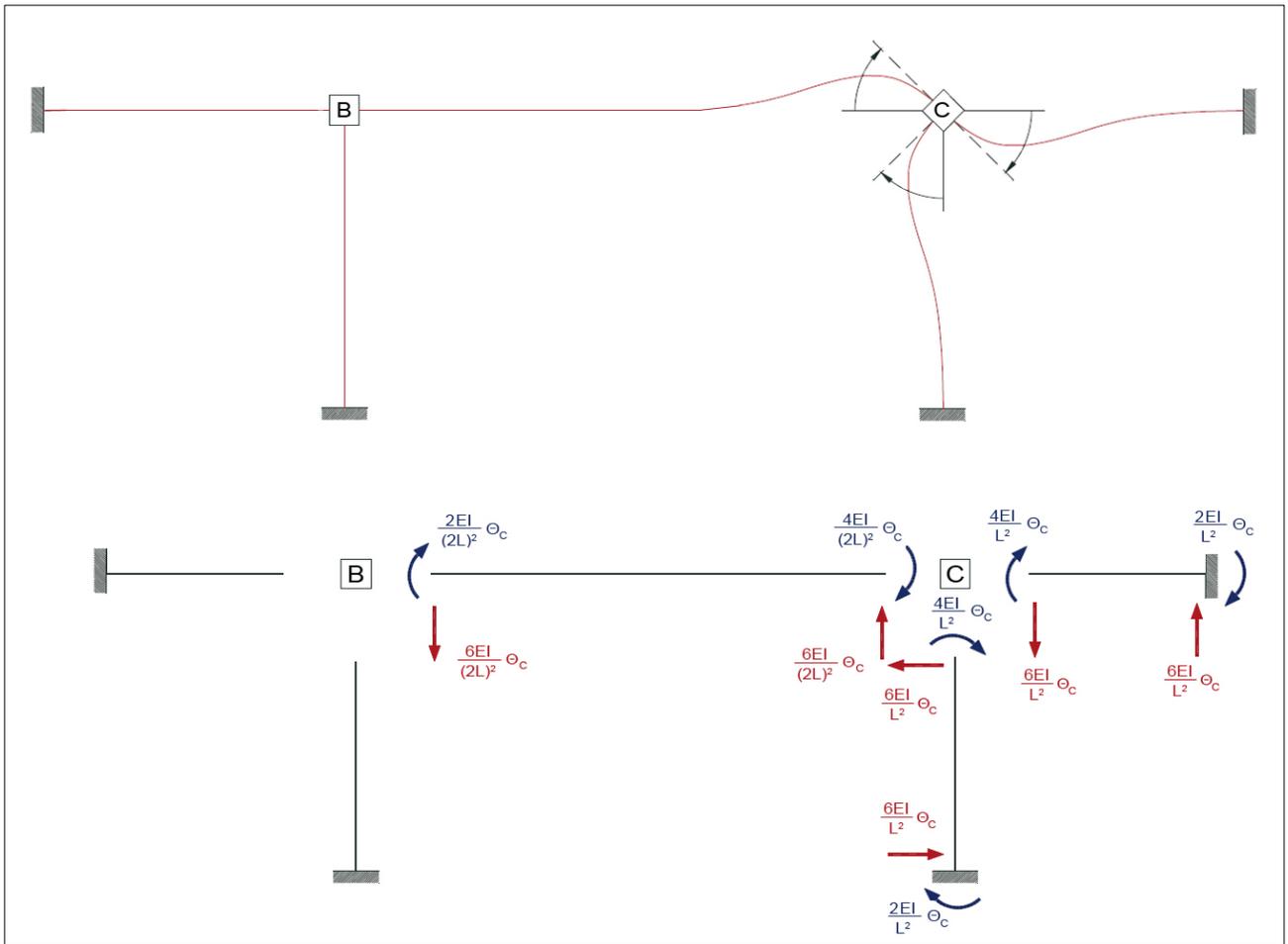


Figura 1.8



### Equilibrio dei momenti ai nodi:

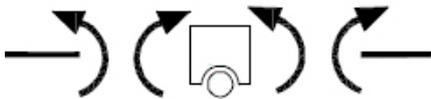
$$\text{Rotazione B)} \quad -\frac{1}{4} pL^2 + \frac{10 EI}{L} \Theta_B + \frac{EI}{L} \Theta_C = 0$$

$$\text{Rotazione C)} \quad \frac{1}{4} pL^2 + \frac{10 EI}{L} \Theta_B + \frac{EI}{L} \Theta_C = 0$$

Per la scrittura del sistema si è assunta la seguente convenzione per i momenti:



Si sottolinea che le reazioni agenti ai nodi hanno verso e quindi segno opposto rispetto alle reazioni delle precedenti figure:



Risolvendo il sistema si ottengono le rotazioni dei nodi B e C:

$$\Theta_B = \frac{pL^3}{36 EI} \quad \Theta_C = -\frac{pL^3}{36 EI}$$

Come era prevedibile osservando la simmetria della struttura e la simmetria dei carichi, le caratteristiche deformative risultano speculari: le rotazioni sono uguali e di segno opposto nelle coppie di punti simmetrici (B e C).

Come le deformazioni, anche le caratteristiche statiche dovranno essere simmetriche: i diagrammi dello sforzo normale (N) e del momento flettente (M) saranno uguali e di segno contrario rispetto l'asse di simmetria, mentre il taglio (T) risulterà uguale ma di segno opposto, cioè antisimmetrico.

Di seguito si anticipa la tabella comparativa tra i risultati teorici e quelli ottenuti tramite software agli elementi finiti riferiti, che verranno trattati in maniera più approfondita nel paragrafo 1.4. I dati della tabella 1.1 sono riferiti alle rotazioni ed ai momenti flettenti nei punti A, B ed E, stante la simmetria precedentemente illustrata.

	Errore Teorico - FEM
$M_E$	6,4 %
$M_A$	33 %
$M_B (AB)$	2,2 %
$M_B (EB)$	1,7 %
$M_B (BC)$	0,85 %
$\Theta_B$	9,3 %

Tabella 1.1

Dall'analisi della tabella 1.1 si riscontra un marcato scostamento del valore della rotazione del nodo B (circa il 9%) e dei valori del momento flettente negli incastri A e D, dove l'errore del 33% circa non risulta accettabile.

Per risolvere tale incongruenza si sono cambiate le ipotesi di lavoro iniziali per le travi BE e CF: esse vengono ora considerate deformabili assialmente, ciò produce che i nodi B e C possano oltre che ruotare, traslare verticalmente. Le ipotesi di lavoro per la trave AD rimangono immutate.

Si introducono ora nello studio della struttura i sistemi "3" e "4" ottenuti di volta in volta imponendo le traslazioni verticali dei nodi B e C. Anche in questo caso si ottengono le reazioni vincolari che esplicano gli incastri riconducendosi al caso elementare di figura 1.9.

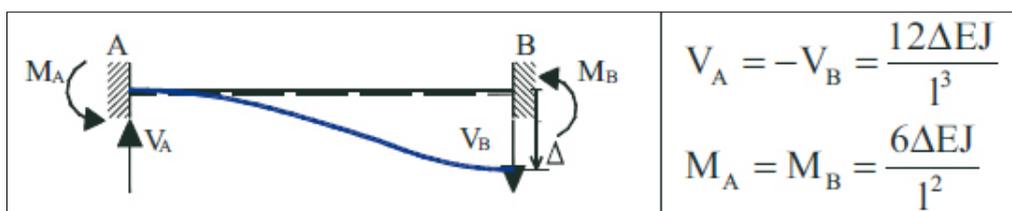


Figura 1.9



### Sistema "3" - Traslazione verticale del nodo B

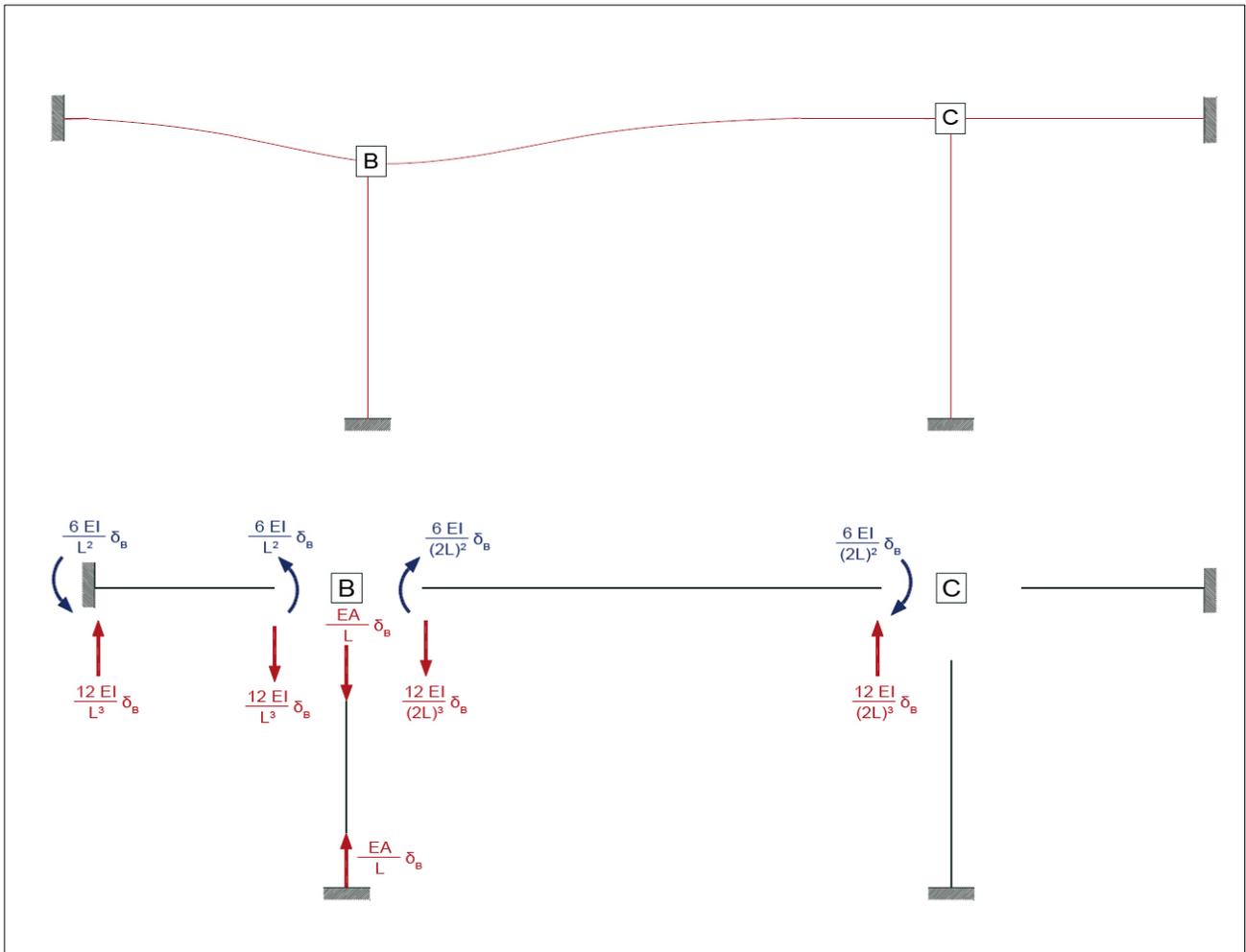


Figura 1.10

### Sistema "4" - Traslazione verticale del nodo C

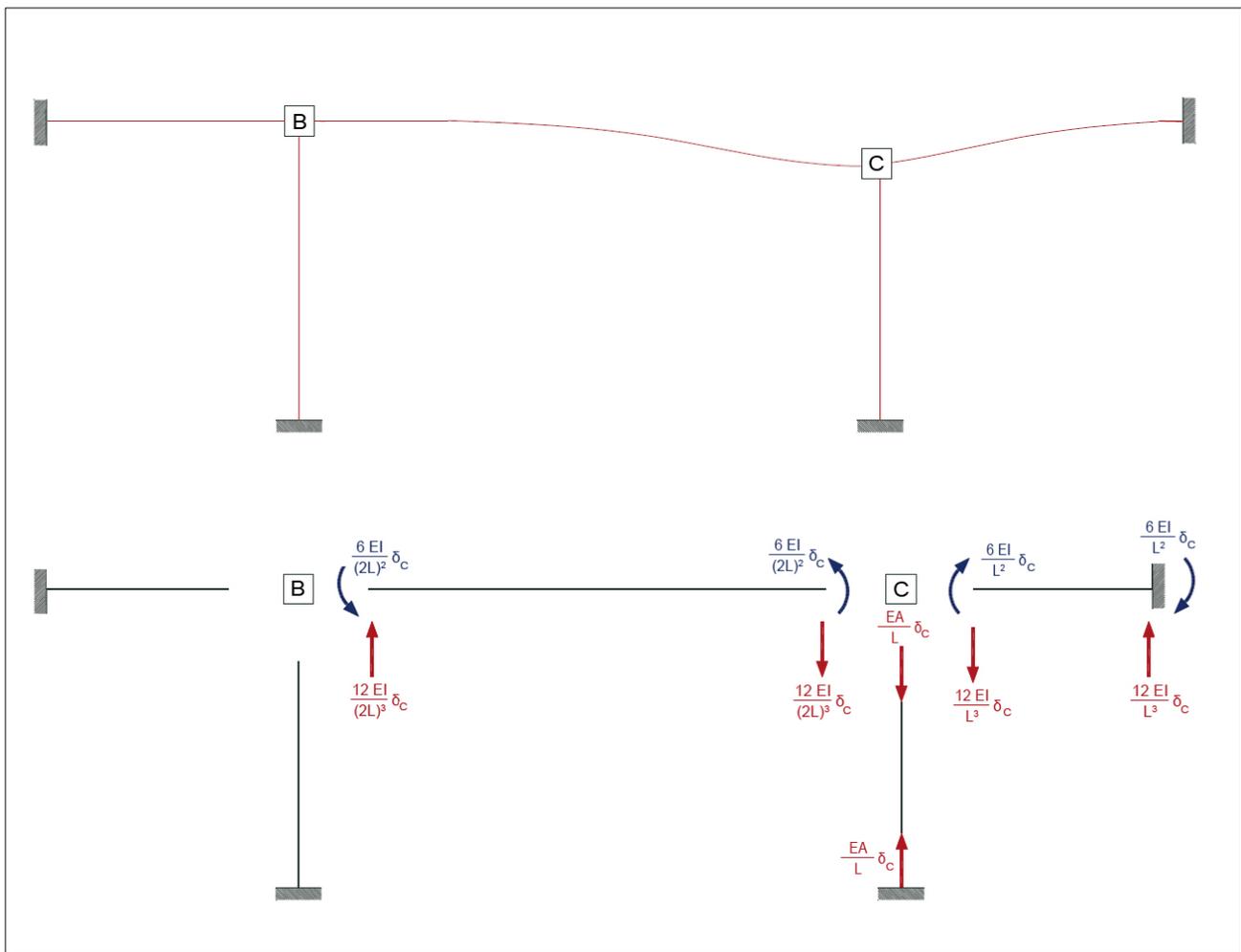


Figura 1.11

Imponendo l'equilibrio dei momenti ai nodi, si ottiene un sistema di 4 equazioni in 4 incognite. Risolvendo tale sistema si otterranno fra le infinite soluzioni congruenti gli unici valori delle rotazioni e delle traslazioni che garantiscono l'equilibrio.

Una volta risolto il sistema, si calcolano tramite il principio di sovrapposizione degli effetti i valori del momento flettente (M), del taglio (T) e dello sforzo normale (N) ai nodi stessi.

### Equilibrio dei momenti ai nodi:

$$\text{Rotazione B)} \quad -\frac{1}{4} pL^2 + \frac{10EI}{L} \Theta_B + \frac{EI}{L} \Theta_C - \frac{9EI}{2L^2} \delta_B - \frac{3EI}{2L^2} \delta_C = 0$$

$$\text{Rotazione C)} \quad \frac{1}{4} pL^2 + \frac{10EI}{L} \Theta_B + \frac{EI}{L} \Theta_C + \frac{9EI}{2L^2} \delta_B + \frac{3EI}{2L^2} \delta_C = 0$$

$$\text{Traslazione B)} \quad -\frac{3}{2} pL - \frac{9EI}{2L^2} \Theta_B + \frac{3EI}{2L^2} \Theta_C + \frac{27EI}{2L^3} \delta_B + \frac{EA}{L} \delta_B - \frac{3EI}{2L^3} \delta_C = 0$$

$$\text{Traslazione C)} \quad -\frac{3}{2} pL + \frac{9EI}{2L^2} \Theta_C - \frac{3EI}{2L^2} \Theta_B + \frac{27EI}{2L^3} \delta_C + \frac{EA}{L} \delta_C - \frac{3EI}{2L^3} \delta_B = 0$$

Risolvendo il sistema si ottengono le rotazioni e le traslazioni dei nodi:

$$\Theta_B = \frac{pL^3(AL^2+48I)}{36EI(AL^2+8I)} \quad \Theta_C = -\frac{pL^3(AL^2+48I)}{36EI(AL^2+8I)}$$

$$\delta_B = \frac{5pL^4}{3EI(AL^2+8I)} \quad \delta_C = \frac{5pL^4}{3EI(AL^2+8I)}$$

Come era prevedibile osservando la simmetria della struttura e la simmetria dei carichi, le caratteristiche deformative risultano speculari: le rotazioni sono uguali e di segno opposto nelle coppie di punti simmetrici (B e C).

Come le deformazioni, anche le caratteristiche statiche dovranno essere simmetriche: i diagrammi dello sforzo normale (N) e del momento flettente (M) saranno uguali e di segno contrario rispetto l'asse di simmetria, mentre il taglio (T) risulterà uguale ma di segno opposto, cioè antisimmetrico.

## Calcolo dei valori del momento (M) e del taglio (T) ai nodi

Si effettua il calcolo solo su metà telaio, stante le considerazioni precedentemente illustrate.

### Incastro A

$$M_A = \frac{pL^2}{12} - \frac{2EI}{L} \Theta_B + \frac{6EI}{L^2} \delta_B \qquad T_A = \frac{pL}{2} - \frac{6EI}{L^2} \Theta_B + \frac{12EI}{L^3} \delta_B$$

### Incastro E

$$M_E = -\frac{2EI}{L} \Theta_B \qquad T_E = -\frac{6EI}{L^2} \Theta_B$$

### Nodo B

#### *Tratto AB*

$$M_B(AB) = \frac{pL^2}{12} + \frac{4EI}{L} \Theta_B - \frac{6EI}{L^2} \delta_B \qquad T_B(AB) = \frac{pL}{2} + \frac{6EI}{L^2} \Theta_B - \frac{12EI}{L^3} \delta_B$$

#### *Tratto EB*

$$M_B(EB) = -\frac{4EI}{L} \Theta_B \qquad T_B(EB) = -\frac{6EI}{L^2} \Theta_B$$

#### *Tratto BC*

$$M_B(BC) = \frac{p(2L)^2}{12} - \frac{4EI}{2L} \Theta_B - \frac{2EI}{2L} \Theta_C - \frac{6EI}{(2L)^2} \delta_B + \frac{6EI}{(2L)^2} \delta_C$$

$$T_B(BC) = \frac{p(2L)}{2} - \frac{12EI}{(2L)^3} \delta_B - \frac{12EI}{(2L)^3} \delta_C$$

## Calcolo degli sforzi normali (N)

Ora si calcolano gli sforzi normali (N) nelle aste delle travi del telaio in esame mediante l'equilibrio delle forze ai nodi.

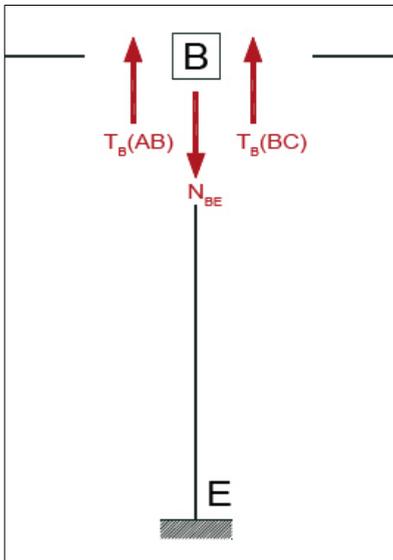


Figura 1.12

### Sforzo normale tratto BE

Equazione di equilibrio da cui si ricava lo sforzo normale nel tratto BE:

$$-N_{BE} + T_B(AB) + T_B(BC) = 0$$

$$N_{BE} = T_B(AB) + T_B(BC)$$

Allo stesso risultato si perviene per il tratto CF

Si calcola ora lo sforzo normale nella trave AD. Le azioni trasversali delle travi BE e CF presenti rispettivamente nei nodi B e C devono venire equilibrate da azioni interne uguali ed opposte presenti nella trave AD in B e C (figura 1.13).

Per calcolare le reazioni che esplicano gli incastri A e D si utilizzano le espressioni che assumono le reazioni vincolari per il seguente caso standard (figura 1.14).



Figura 1.13

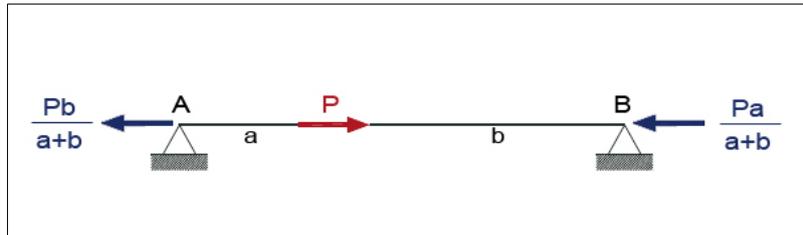


Figura 1.14

Per sovrapposizione degli effetti vengono prima calcolate le reazioni vincolari che esplicano gli appoggi dovuti alla forza assiale nel nodo B, e successivamente vengono sommate alle reazioni vincolari dovute alla forza assiale presente nel nodo C, in modo da ottenere le reazioni vincolari complessive.

### Reazione in B (n°1)

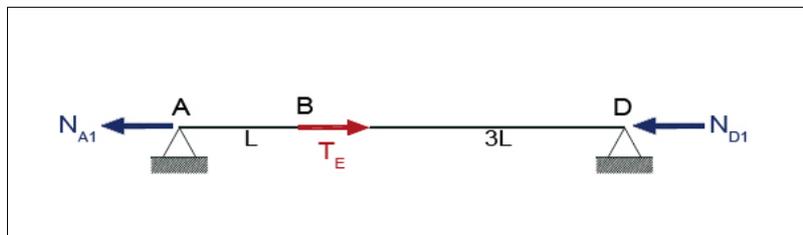


Figura 1.15

$$N_{A1} = \frac{T_E b}{a + b} = \frac{T_E 3L}{4L}$$

$$N_{D1} = \frac{T_E a}{a + b} = \frac{T_E L}{4L}$$

### Reazione in C (n°2)

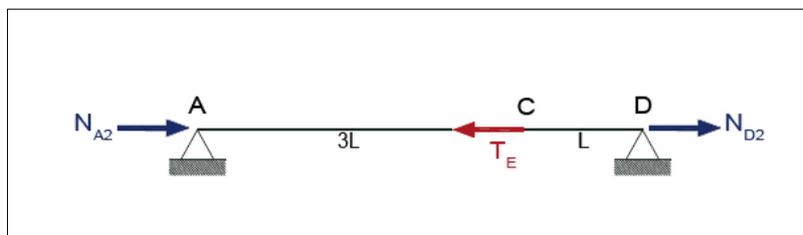


Figura 1.16

$$N_{A2} = -\frac{T_E b}{a + b} = -\frac{T_E L}{4L}$$

$$N_{D2} = -\frac{T_E a}{a + b} = -\frac{T_E 3L}{4L}$$

Sommando i contributi precedentemente calcolati si ottiene:

$$N_A = N_{A1} + N_{A2} = \frac{T_E}{2}$$

$$N_D = N_{D1} + N_{D2} = \frac{T_E}{2}$$

### Sforzo normale in AB e CD

Note le sollecitazioni ai nodi A e D, di fatto è noto anche lo sforzo normale nei tratti AB e CD in quanto si mantiene costante lungo tali tratti:

$$N_{AB} = N_{CD} = \frac{T_E}{2}$$

### Sforzo normale in BC

Si ricava ora lo sforzo normale lungo il tratto BC, utilizzando le relazioni di salto nel nodo B:

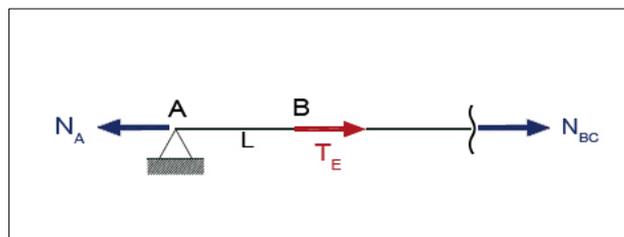


Figura 1.17

$$-N_A + N_{BC} + T_E = 0$$

$$N_{BC} = -T_E + N_A = -T_E + \frac{T_E}{2} = -\frac{T_E}{2}$$

## Diagrammi delle sollecitazioni

Integrando le equazioni locali di bilancio ed utilizzando come condizioni al contorno i valori delle reazioni calcolate, si ottengono i grafici dello sforzo normale (N), del taglio (T) e del momento flettente (M).

Equazioni di bilancio:

$$N' + q = 0$$

$$T' + p = 0$$

$$M' - T + m = 0$$

Le convenzioni utilizzate sono le seguenti:



### Diagramma dello sforzo normale (N)

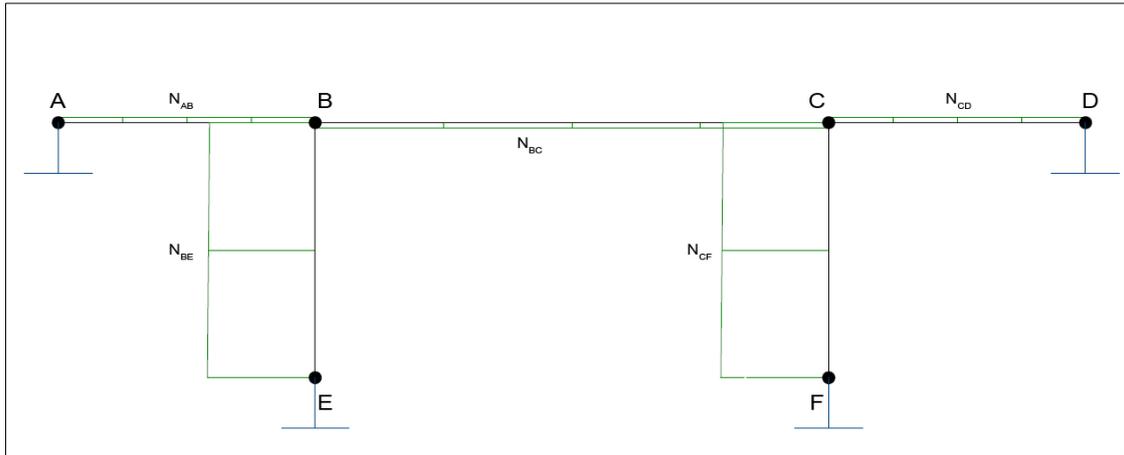


Figura 1.18

### Diagramma del taglio (T)

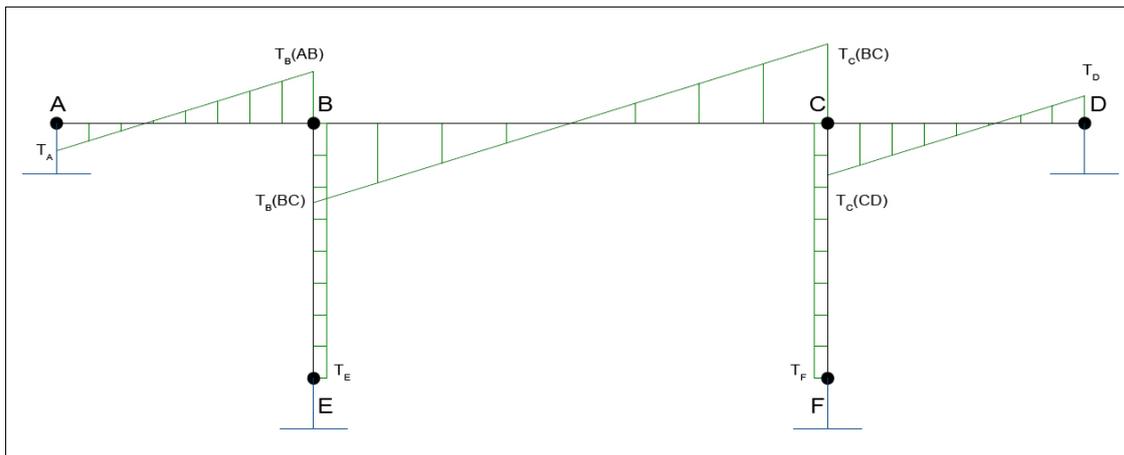


Figura 1.19

### Diagramma del momento flettente (M)

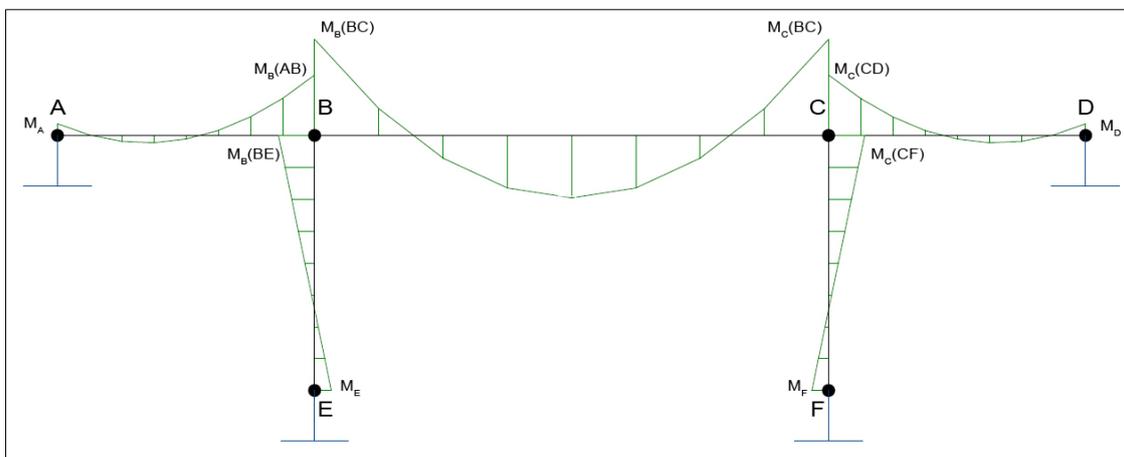


Figura 1.20

## ||| Capitolo 2:

### Instabilità dell'equilibrio elastico

#### 2.1 Introduzione

L'instabilità dell'equilibrio elastico si verifica in genere in elementi strutturali snelli soggetti a sollecitazioni di compressione, come ad esempio pilastri degli edifici, alberi delle macchine, puntoni delle travature reticolari, archi, volte sottili, gusci ed altri casi più complessi, sia per quanto riguarda la geometria della struttura, sia per quanto riguarda le sollecitazioni a cui è sottoposta.

In questi problemi l'elemento essenziale è l'influenza dello stato deformativo sullo stato tensionale: non è più lecito confondere la configurazione deformata con quella indeformata nella valutazione sollecitazioni interne. In altre parole tenendo conto della deformazione della trave, le distanze non possono essere più calcolate riferendosi alla configurazione iniziale indeformata, bensì devono tenere conto della deformazione della trave stessa, poiché le caratteristiche della sollecitazione sono conseguenti all'applicazione dei carichi e si riferiscono alla condizione deformata e non a quella iniziale.

Nei problemi di stabilità si vuole quindi stabilire, tenendo conto di tale premessa, se il sistema è equilibrato o meno e valutare com'è equilibrato, cioè se si tratta di equilibrio stabile, instabile o indifferente.

Il metodo utilizzato in seguito per risolvere sistemi discreti ad un grado di libertà si basa sul *Metodo Energetico*.

Tale metodo considera l'energia potenziale totale del sistema  $W_t(x)$ , dove con  $x$  si indica la coordinata generalizzata che individua completamente la configurazione del sistema ad un grado di libertà. L'energia potenziale totale in una generica configurazione del sistema si determina sommando la variazione di energia potenziale dovuta alle forze esterne al sistema con la variazione di energia potenziale elastica quando il sistema si allontana dalla sua configurazione di equilibrio.

Successivamente annullando la derivata prima dell'energia potenziale  $W'_t(x)$  si ottiene l'equazione che individua le configurazioni di equilibrio del sistema. Le soluzioni dell'equazione di equilibrio rappresentano i *percorsi fondamentali di equilibrio*,

(fondamentale e diramato). Tale equazione lega la sollecitazione esterna e la configurazione deformata lungo tali percorsi. L'intersezione tra questi due percorsi individua il *punto di biforcazione* del sistema ed il valore che assume la sollecitazione esterna in quel punto prende il nome di *carico critico*.

Per verificare la stabilità dei percorsi di equilibrio trovati si considera la derivata seconda dell'energia potenziale totale del sistema  $W''_t(x)$ : è noto infatti che affinché un sistema sia in una condizione di equilibrio stabile, instabile o indifferente, è necessario che la derivata seconda dell'energia potenziale totale  $W''_t(x)$  sia rispettivamente maggiore, minore od uguale a zero.

Considerando inoltre una possibile imperfezione iniziale del sistema, si aggiungono ai percorsi fondamentali di equilibrio, altre due tipologie di curve, i *percorsi di equilibrio naturale* ed i *percorsi di equilibrio non naturale*, il cui significato verrà analizzato in seguito.

Trattazione analoga può essere applicata per sistemi ad  $n$  gradi di libertà, dove verranno trovate più configurazioni del sistema relative agli stati critici.

Di seguito verranno studiati due sistemi ad un grado di libertà trattati spesso nella letteratura ed un semplice telaio, sempre ad un grado di libertà, condizionato da due variabili parametriche.

## 2.2 Sistema comportamento post-critico simmetrico stabile

Si consideri il sistema meccanico illustrato in figura 2.1, costituito da due aste rigide di lunghezza  $l$  collegate da una cerniera rotazionale elastica di rigidezza  $k$  e vincolate alle estremità rispettivamente da una cerniera e da un carrello. Il sistema è sollecitato da una forza orizzontale  $N$ . La configurazione del sistema meccanico è completamente individuata dall'angolo  $\varphi$ , misurato a partire dalla configurazione orizzontale delle due aste rigide.

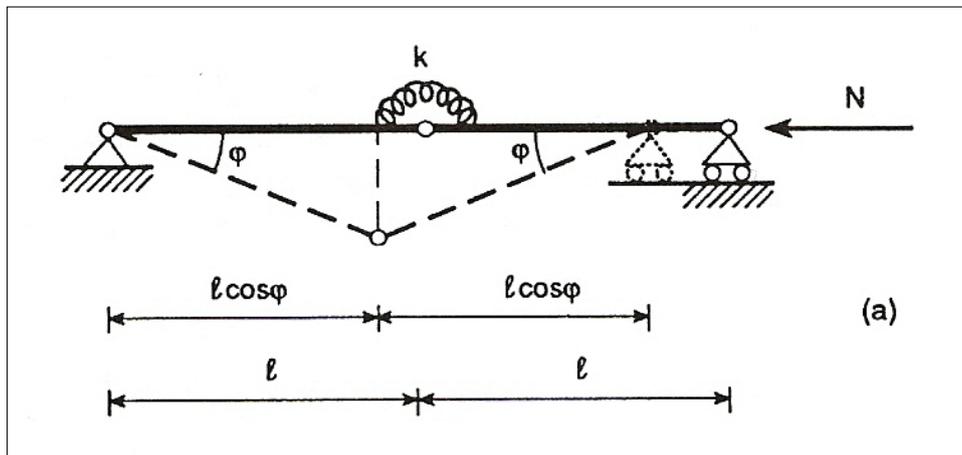


Figura 2.1

### Determinazione del carico critico

Nella generica configurazione l'energia potenziale del sistema risulta pari a:

$$W_t(\varphi) = 2k\varphi^2 - 2N(l - l\cos\varphi)$$

Con il termine  $2k\varphi^2$  si indica l'energia potenziale elastica quando il sistema si allontana dalla sua configurazione di equilibrio, mentre con il termine  $-2N(l - l\cos\varphi)$  si indica l'energia potenziale dovuta al lavoro che compie la forza esterna al sistema, essendo  $2(l - l\cos\varphi)$  lo spostamento orizzontale che subisce il punto di applicazione della forza  $N$ .

Successivamente annullando la derivata prima dell'energia potenziale totale si cerca l'equazione che individua le configurazioni di equilibrio del sistema:

$$W_t'(\varphi) = 4k\varphi - 2Nl\sin\varphi = 0$$

da cui:

$$N = \frac{2k\varphi}{l \sin\varphi}$$

Tutte le coppie di valori  $N - \varphi$  che soddisfano la precedente equazione rappresentano stati di equilibrio:

- per  $\varphi = 0$  l'equazione risulta soddisfatta per qualunque valore di  $N$  e quindi nel piano  $N - \varphi$  tutti i punti dell'asse  $\varphi = 0$  rappresentano stati di equilibrio. Tale curva rappresenta il *percorso fondamentale di equilibrio* (figura 2.2 – linea verde)
- per tutti gli altri valori  $\varphi \neq 0$ , si ottiene il *percorso diramato di equilibrio* (figura 2.2 – linea blu)
- il punto di intersezione tra i due percorsi di equilibrio individua il *punto di biforcazione* ed il valore di  $N$  in tale punto è il *carico critico* in corrispondenza del quale si verifica la biforcazione del sistema (figura 2.2 – punto rosso)

In questo caso il valore del carico critico può essere determinato attraverso il limite per  $\varphi \rightarrow 0$  nell'espressione di  $N$ , poiché per  $\varphi = 0$  si otterrebbe una forma indeterminata:

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} N = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{2k\varphi}{l \operatorname{sen}\varphi} = \frac{2k}{l}$$

Il valore del carico critico per cui si verifica la biforcazione del sistema è:

$$N_{cr} = \frac{2k}{l}$$

Di seguito per evidenziare entrambi i percorsi di equilibrio si riporta un caso numerico ( $k = 1000 \text{ N/m}$  ed  $l = 1 \text{ m}$ ).

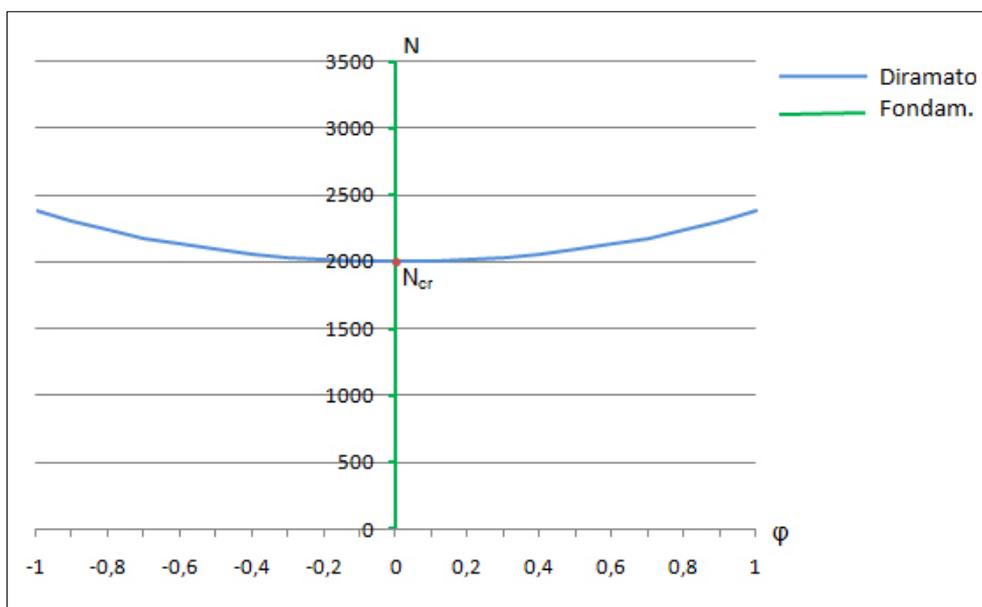


Figura 2.2

### **Stabilità dei percorsi di equilibrio**

Per verificare la stabilità dei percorsi di equilibrio trovati si considera la derivata seconda dell'energia potenziale totale del sistema:

$$W_t''(\varphi) = 4k - 2Nl\cos\varphi$$

#### Percorso fondamentale di equilibrio

$$W_t''(0) = 4k - 2Nl > 0$$

$$N < \frac{2k}{l} = N_{cr}$$

Il percorso fondamentale di equilibrio è definito positivo, quindi stabile, per valori del carico  $N$  inferiori al carico critico ( $N < \frac{2k}{l}$ ) e definito negativo, quindi instabile, per i valori di  $N$  superiori al carico critico ( $N > \frac{2k}{l}$ ).

#### Percorso diramato di equilibrio

$$W_t''(\varphi) = 4k - 2Nl\cos\varphi > 0$$

Avendo posto all'interno della derivata seconda dell'energia potenziale totale  $N = \frac{2k\varphi}{l\sin\varphi}$  (equazione che individua le configurazioni di equilibrio del sistema) si ottiene:

$$4k(1 - \varphi\cot\varphi) > 0$$

Tale disuguaglianza è sempre verificata per ogni valore di  $\varphi$  ( $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ ), quindi i punti del percorso diramato di equilibrio sono punti di equilibrio stabile.

#### Punto di biforcazione

Avendo posto all'interno della derivata seconda dell'energia potenziale totale  $N = \frac{2k}{l}$  (valore del carico  $N$  nel punto di biforcazione) si ottiene:

$$W_t''(0) = 0 \qquad W_t'''(0) = 0 \qquad W_t^{IV}(0) = 4k > 0$$

Essendo la derivata quarta dell'energia potenziale definita positiva, il punto in cui si verifica la biforcazione è un punto di equilibrio stabile.

Tutte le strutture che presentano un percorso di equilibrio diramato del tipo di quello esaminato vengono dette strutture a comportamento *post-critico simmetrico stabile* (figura 2.3).

Si nota che il comportamento globale del sistema è di tipo *hardening*, richiedendo l'aumento di deformazione un ulteriore aumento del carico esterno.

Se per un qualsiasi valore del carico compreso tra  $0 < N < N_{cr}$  si impone alla trave una rotazione che la porti in una configurazione variata diversa da quella iniziale e dalla quale la si rilascia istantaneamente, la trave ritorna nella posizione iniziale, ovvero i carichi  $N$  inferiori ad  $N_{cr}$  caratterizzano un equilibrio stabile.

Per carichi  $N > N_{cr}$  dopo una piccola perturbazione il sistema si allontana dallo stato di equilibrio, essendo la situazione caratterizzata da posizioni di equilibrio instabile.

Per  $N = N_{cr}$  l'equilibrio è indifferente, cioè sono possibili variazioni infinitesime dalla posizione nel rispetto dell'equilibrio.

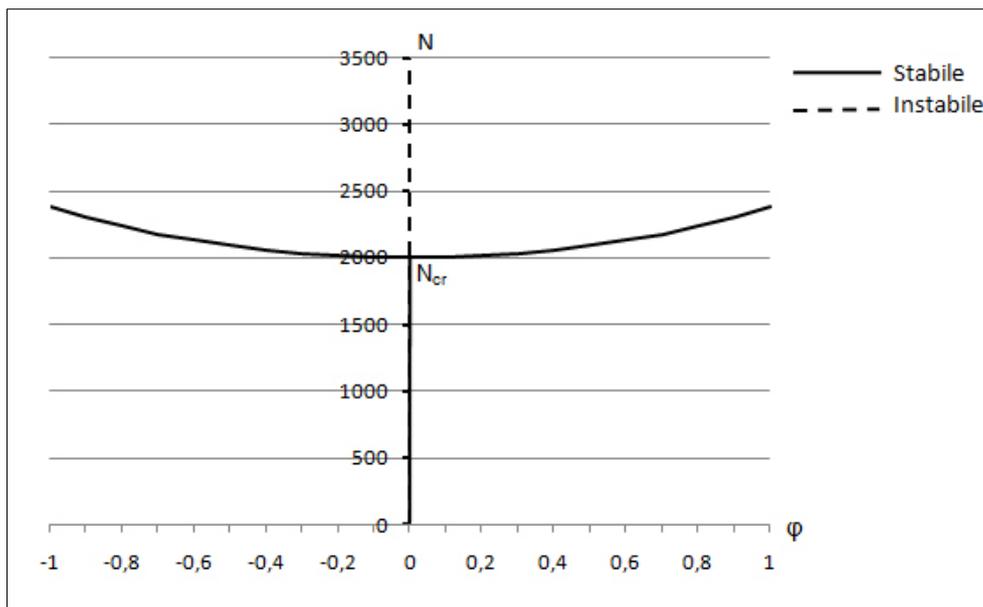


Figura 2.3

### Imperfezione iniziale $\varphi_0$

Consideriamo ora il caso in cui nel sistema sia presente una imperfezione iniziale rappresentata da una piccola inclinazione  $\varphi_0$  delle aste rigide rispetto alla configurazione orizzontale.

Nella generica configurazione l'energia potenziale del sistema risulta pari a:

$$W(\varphi; \varphi_0) = 2k(\varphi - \varphi_0)^2 - 2Nl(1 - \cos\varphi) + 2Nl(1 - \cos\varphi_0)$$

da cui:

$$W(\varphi; \varphi_0) = 2k(\varphi - \varphi_0)^2 - 2Nl(-\cos\varphi + \cos\varphi_0)$$

Eseguendo ora lo sviluppo in serie di Taylor di  $\cos\varphi_0$  fino al quarto ordine (consentito perché si è assunto piccolo il valore dell'imperfezione) si ottiene:

$$W(\varphi; \varphi_0) = 2k(\varphi^2 - 2\varphi\varphi_0 + \varphi_0^2) - 2Nl\left(-\cos\varphi + 1 + \frac{\varphi_0^4}{24} - \frac{\varphi_0^2}{2}\right)$$

Supponiamo ora che  $\varphi_0$  sia così piccolo che sia lecito trascurare rispetto al termine in  $\varphi\varphi_0$  tutti i termini che contengono una potenza di  $\varphi_0$  superiore alla prima. Sotto queste ipotesi l'energia potenziale del sistema si riduce alla seguente relazione:

$$W(\varphi; \varphi_0) = 2k(\varphi^2 - 2\varphi\varphi_0) - 2Nl(-\cos\varphi + 1)$$

Derivando ora l'energia potenziale totale rispetto a  $\varphi$  e ponendo uguale a zero tale espressione si ottiene l'equazione che individua le configurazioni di equilibrio del sistema in funzione di  $\varphi$  e  $\varphi_0$ :

$$W'(\varphi) = 4k(\varphi - \varphi_0) - 2Nl \operatorname{sen}\varphi = 0$$

da cui:

$$N = \frac{2k(\varphi - \varphi_0)}{l \operatorname{sen}\varphi}$$

Di seguito per evidenziare i percorsi di equilibrio si riporta un caso numerico ( $k = 1000 \text{ N/m}$ ,  $l = 1 \text{ m}$  e  $\varphi_0 = \frac{n\pi}{100}$  per  $n = -5, -4, \dots, 4, 5$ ).

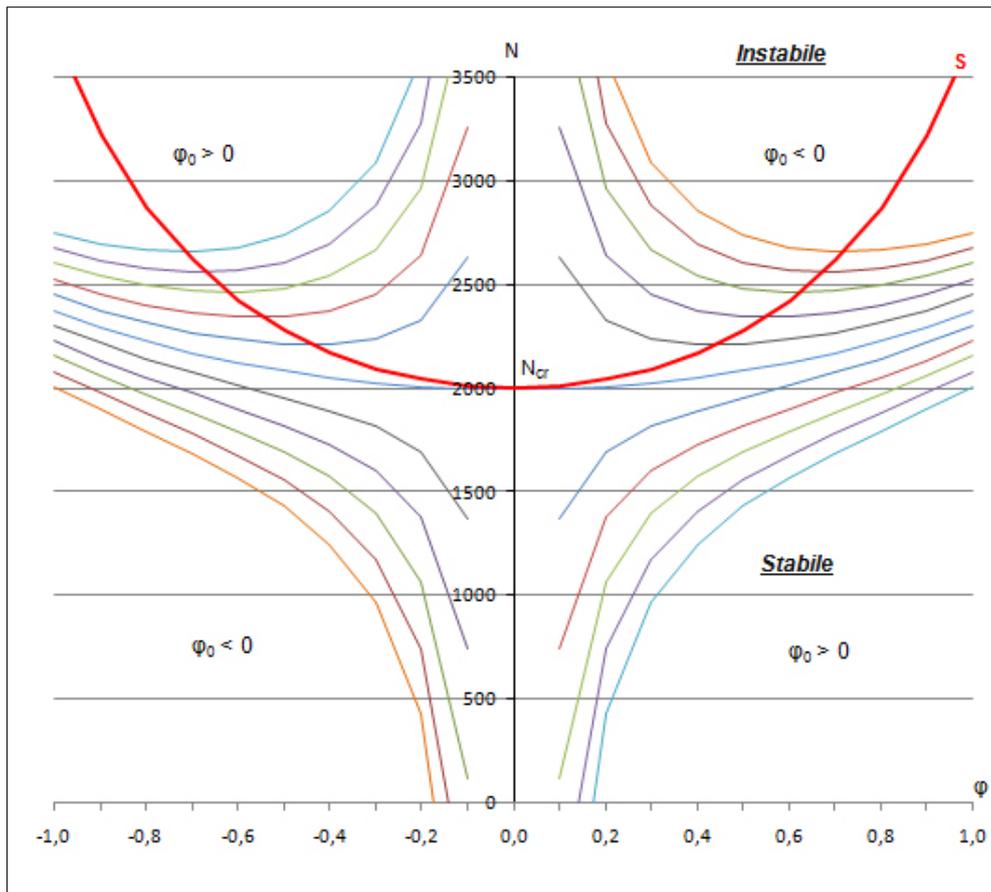


Figura 2.4

Si osservi che l'equazione di equilibrio trovata nel caso dell'imperfezione è simile a quella senza l'imperfezione a meno di un termine  $\varphi_0$  che rappresenta proprio l'imperfezione iniziale imposta:

$$N = \frac{2k\varphi}{l \operatorname{sen}\varphi} \qquad N = \frac{2k(\varphi - \varphi_0)}{l \operatorname{sen}\varphi}$$

Nel diagramma di figura 2.4 si osservano quattro famiglie di curve, due corrispondenti a  $\varphi_0 > 0$  e due corrispondenti a  $\varphi_0 < 0$ .

Alle curve che intercettano l'asse orizzontale si dà il nome di *percorsi di equilibrio naturale*, mentre alle altre di *percorsi di equilibrio non naturale*. Ad ogni valore di  $\varphi_0$  corrisponde una curva di equilibrio naturale ed una di equilibrio non naturale.

In fine diagrammando la funzione  $\frac{d^2W_t}{d\varphi^2} = 4k - 2Nl\cos\varphi = 0$  si ottiene la curva S (figura 2.4 – linea rossa) che divide il piano due parti: in una l'equilibrio è stabile nell'altra instabile. I punti situati all'interno della curva S risultano di equilibrio instabile  $\frac{d^2W_t}{d\varphi^2} < 0$ , mentre i punti situati al di fuori risultano di equilibrio stabile  $\frac{d^2W_t}{d\varphi^2} > 0$ .

### 2.3 Sistema comportamento post-critico simmetrico instabile

Si consideri il sistema meccanico illustrato in figura 2.5, costituito da un'asta rigida di lunghezza  $l$ , incernierata ad una estremità e collegata ad una molla di rigidezza  $k$  all'altra estremità. Sia  $N$  una forza verticale applicata nel baricentro della sezione e  $\theta$  l'angolo che individua la configurazione del sistema meccanico, misurato a partire dalla verticale.

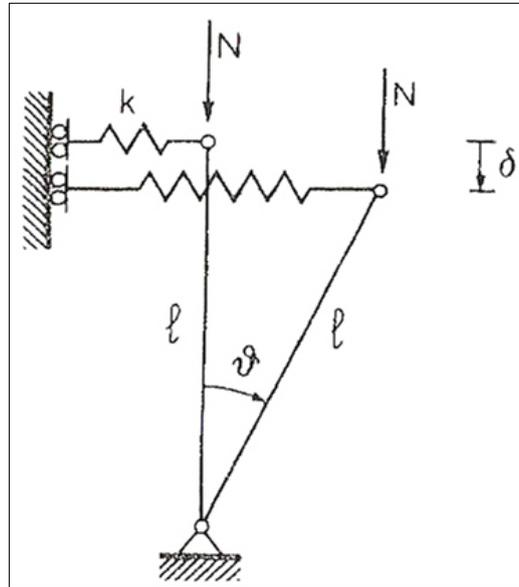


Figura 2.5

#### Determinazione del carico critico

Nelle generica configurazione l'energia potenziale del sistema risulta pari a:

$$W_t(\theta) = \frac{1}{2}kl^2\text{sen}^2\theta - N(l - l\text{cos}\theta)$$

Con il termine  $\frac{1}{2}kl^2\text{sen}^2\theta$  si indica l'energia potenziale elastica quando il sistema si allontana dalla sua configurazione di equilibrio, mentre con il termine  $-N(l - l\text{cos}\theta)$  si indica l'energia potenziale dovuta al lavoro che compie la forza esterna al sistema, essendo  $(l - l\text{cos}\theta)$  lo spostamento verticale che subisce il punto di applicazione della forza  $N$ .

Successivamente annullando la derivata prima dell'energia potenziale totale si cerca l'equazione che individua le configurazioni di equilibrio del sistema:

$$W_t'(\theta) = l\text{sen}\theta(kl\text{cos}\theta - N) = 0$$

da cui:

$$N = kl\text{cos}\theta$$

Tutte le coppie di valori  $N - \theta$  che soddisfano la precedente equazione rappresentano stati di equilibrio:

- per  $\theta = 0$  l'equazione risulta soddisfatta per qualunque valore di  $N$  e quindi nel piano  $N - \theta$  tutti i punti dell'asse  $\theta = 0$  rappresentano stati di equilibrio. Tale curva rappresenta il *percorso fondamentale di equilibrio* (figura 2.6 – linea verde)
- per tutti gli altri valori  $\theta \neq 0$ , si ottiene il *percorso diramato di equilibrio* (figura 2.6 – linea blu)
- il punto di intersezione tra i due percorsi di equilibrio individua il *punto di biforcazione* ed il valore di  $N$  in tale punto è il *carico critico* in corrispondenza del quale si verifica la biforcazione del sistema (figura 2.2 – punto rosso)

Il valore del carico critico per cui si verifica la biforcazione del sistema è:

$$N_{cr} = kl$$

Di seguito per evidenziare entrambi i percorsi di equilibrio si riporta un caso numerico ( $k = 1000 \text{ N/m}$  ed  $l = 1 \text{ m}$ ).

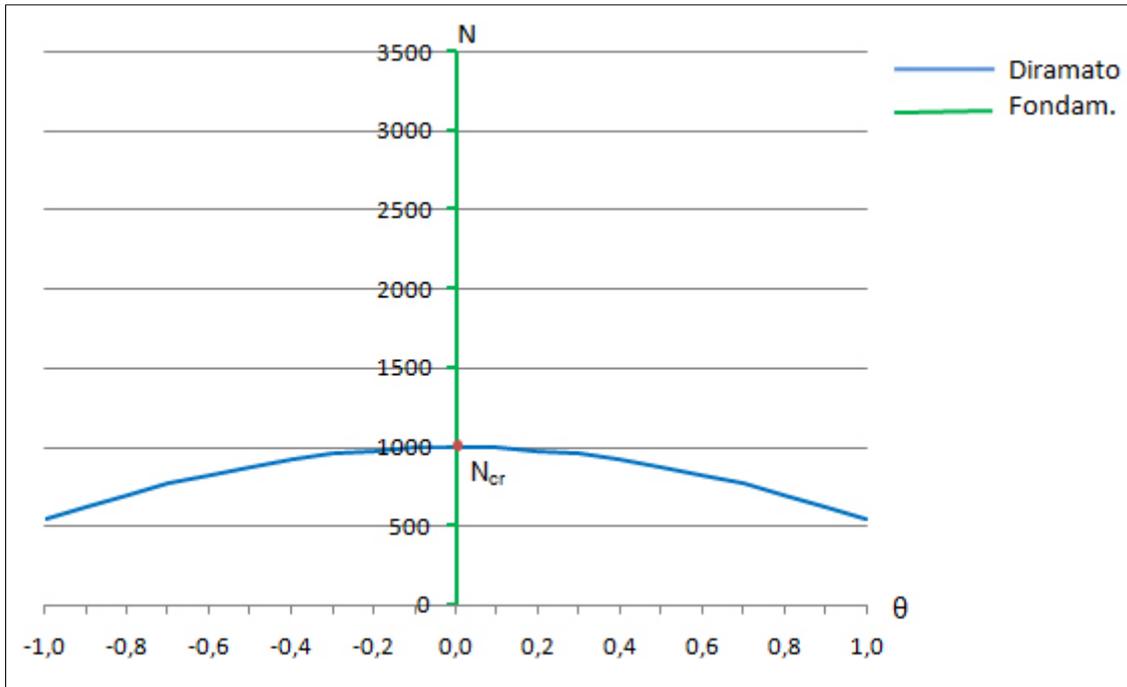


Figura 2.6

### **Stabilità dei percorsi di equilibrio**

Per verificare la stabilità dei percorsi di equilibrio trovati si considera la derivata seconda dell'energia potenziale totale del sistema:

$$W_t''(\theta) = kl^2(2\cos^2\theta - 1) - Nl\cos\theta$$

#### Percorso fondamentale di equilibrio

$$W''(0) = kl^2(2\cos^2\theta - 1) - Nl\cos\theta > 0$$

$$N < kl = N_{cr}$$

Il percorso fondamentale di equilibrio è definito positivo, quindi stabile, per valori del carico  $N$  inferiori al carico critico ( $N < kl$ ) e definito negativo, quindi instabile, per i valori di  $N$  superiori al carico critico ( $N > kl$ ).

#### Percorso diramato di equilibrio

$$W_t''(\theta) = kl^2(2\cos^2\theta - 1) - Nl\cos\theta > 0$$

Avendo posto all'interno della derivata seconda dell'energia potenziale totale  $N = kl\cos\theta$  (equazione che individua le configurazioni di equilibrio del sistema) si ottiene:

$$kl^2(\cos^2\theta - 1) > 0$$

Tale diseuguaglianza non è mai verificata al variare di  $\theta$ , quindi i punti del percorso diramato di equilibrio sono punti di equilibrio instabile.

#### Punto di biforcazione

Avendo posto all'interno della derivata seconda dell'energia potenziale totale  $N = kl$  (valore del carico  $N$  nel punto di biforcazione) si ottiene:

$$W_t''(0) = -kl^2 < 0$$

Essendo la derivata seconda dell'energia potenziale definita negativa, il punto in cui si verifica la biforcazione è un punto di equilibrio instabile.

Tutte le strutture che presentano un percorso di equilibrio diramato del tipo di quello esaminato vengono dette strutture a comportamento *post-critico simmetrico instabile* (figura 2.7).

Si nota che il comportamento globale del sistema è di tipo *softening*, corrispondendo ad un aumento di deformazione una diminuzione del carico esterno.

Se per un qualsiasi valore del carico compreso tra  $0 < N < N_{cr}$  si impone alla trave una rotazione che la porti in una configurazione variata diversa da quella iniziale e dalla quale la si rilascia istantaneamente, la trave ritorna nella posizione iniziale, ovvero i carichi  $N$  inferiori ad  $N_{cr}$  caratterizzano un equilibrio stabile.

Per carichi  $N > N_{cr}$  dopo una piccola perturbazione il sistema si allontana dallo stato di equilibrio, essendo la situazione caratterizzata da posizioni di equilibrio instabile.

Per  $N = N_{cr}$  l'equilibrio è indifferente, cioè sono possibili variazioni infinitesime dalla posizione nel rispetto dell'equilibrio.

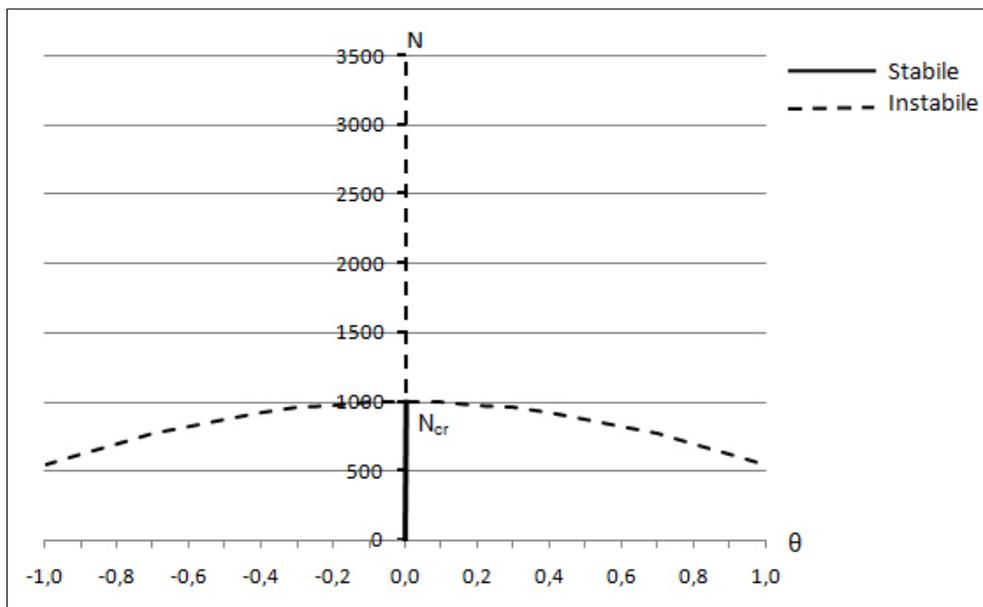


Figura 2.7

### Imperfezione iniziale $\theta_0$

Consideriamo ora il caso in cui nel sistema sia presente una imperfezione iniziale rappresentata da una piccola inclinazione dell'asta  $\theta_0$  in corrispondenza dello stato di tensione nullo della molla.

Nelle generica configurazione l'energia potenziale del sistema risulta pari a:

$$W_t(\theta; \theta_0) = \frac{1}{2}k(l\sin\theta - l\sin\theta_0)^2 - Nl(1 - \cos\theta) + Nl(1 - \cos\theta_0)$$

Eseguendo ora lo sviluppo in serie di Taylor di  $\cos\theta_0$  fino al quarto ordine (consentito perché si è assunto piccolo il valore dell'imperfezione) e supponendo che  $\theta_0$  sia così piccolo che sia lecito trascurare rispetto al termine in  $\theta\theta_0$  tutti i termini che contengono una potenza di  $\theta_0$  superiore alla prima, l'energia potenziale del sistema si riduce alla seguente relazione:

$$W(\theta; \theta_0) = \frac{1}{2}kl^2 \left( \theta^2 - \frac{\theta^4}{3} - 2\theta\theta_0 \right) - Nl \left( \frac{\theta^2}{2} - \frac{\theta^4}{24} \right)$$

Derivando ora l'energia potenziale totale rispetto a  $\theta$  e ponendo uguale a zero tale espressione si ottiene l'equazione che individua le configurazioni di equilibrio del sistema in funzione di  $\theta$  e  $\theta_0$ :

$$N = kl \left( 1 - \frac{\theta^2}{2} - \frac{\theta_0}{\theta} \right)$$

Di seguito per evidenziare i percorsi di equilibrio si riporta un caso numerico ( $k = 1000 \text{ N/m}$ ,  $l = 1 \text{ m}$  e  $\theta_0 = \frac{n\pi}{100}$  per  $n = -5, -4, \dots, 4, 5$ ).

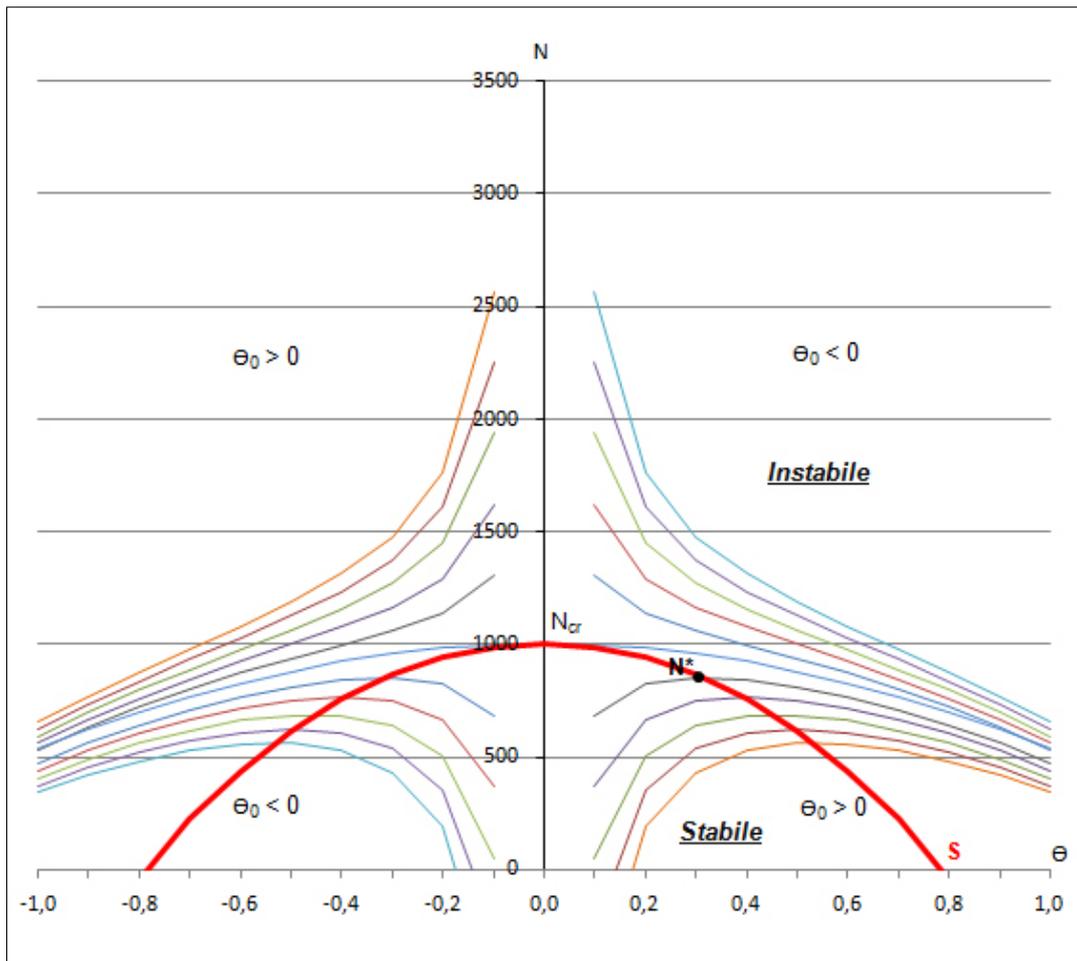


Figura 2.8

Si osservi che l'equazione di equilibrio trovata nel caso dell'imperfezione è simile a quella senza l'imperfezione a meno del termine tra parentesi, dove  $(1 - \frac{\theta^2}{2})$  è lo sviluppo in serie di Taylor del coseno e  $(\frac{\theta_0}{\theta})$  rappresenta l'imperfezione imposta:

$$N = kl \cos \theta$$

$$N = kl \left( 1 - \frac{\theta^2}{2} - \frac{\theta_0}{\theta} \right)$$

Anche in questo caso nel diagramma di figura 2.8 si osservano quattro famiglie di curve, due corrispondenti a  $\theta_0 > 0$  e due corrispondenti a  $\theta_0 < 0$ .

Alle curve che intercettano l'asse orizzontale si dà il nome di *percorsi di equilibrio naturale*, mentre alle altre, *percorsi di equilibrio non naturale*. Ad ogni valore di  $\theta_0$  corrisponde una curva di equilibrio naturale ed una di equilibrio non naturale.

In fine diagrammando la funzione  $\frac{d^2 W_t}{d\theta^2} = kl^2(2\cos^2\theta - 1) - Nl\cos\theta = 0$  si ottiene la curva S (figura 2.8 – linea rossa) che divide il piano due parti: in una l'equilibrio è stabile

nell'altra instabile. I punti situati all'interno della curva S risultano di equilibrio stabile  $\frac{d^2W_t}{d\varphi^2} > 0$ , mentre i punti situati al di fuori risultano di equilibrio instabile  $\frac{d^2W_t}{d\varphi^2} < 0$ .

Una differenza sostanziale contraddistingue tuttavia il modello meccanico studiato nel presente paragrafo da quello analizzato nel paragrafo precedente e consiste nel fatto che le curve di equilibrio naturale raggiungono un massimo  $N^*$  e poi decrescono (figura 2.8). Per trovare la dipendenza di  $N^*$  da  $\theta_0$  si cerca il punto stazionario di tali curve:

$$\frac{dN}{d\theta} = kl \left( -\theta + \frac{\theta_0}{\theta^2} \right) = 0$$

da cui:  $\theta = \theta_0^{1/3}$

Sostituendo  $\theta = \theta_0^{1/3}$  all'interno di  $N = kl \left( 1 - \frac{\theta^2}{2} - \frac{\theta_0}{\theta} \right)$  si perviene alla:

$$N^* = kl \left( 1 - \frac{3}{2} \theta_0^{2/3} \right)$$

Ad  $N^*$  si dà il nome di *carico di collasso o carico limite* e il punto corrispondente è detto il *punto limite*.

Da quanto detto si deduce che una piccola imperfezione iniziale  $\theta_0$  induce un carico di collasso  $N^*$  notevolmente inferiore al carico critico  $N_{cr}$ .

Questo tipo di strutture vengono così definite *sensibili alle imperfezioni iniziali*.

## 2.4 Telaio a comportamento post-critico simmetrico stabile

Si consideri il telaio a due cerniere di figura 2.9 nel quale la traversa è collegata alle colonne mediante dispositivi di scarsa rigidezza schematizzati attraverso due molle di rigidezza  $K_1$  e  $K_2$ . Il sistema è sollecitato da due forze verticali  $N$  applicate in tali punti. L'angolo  $\theta$ , misurato a partire dalla verticale, individua completamente la configurazione del sistema.

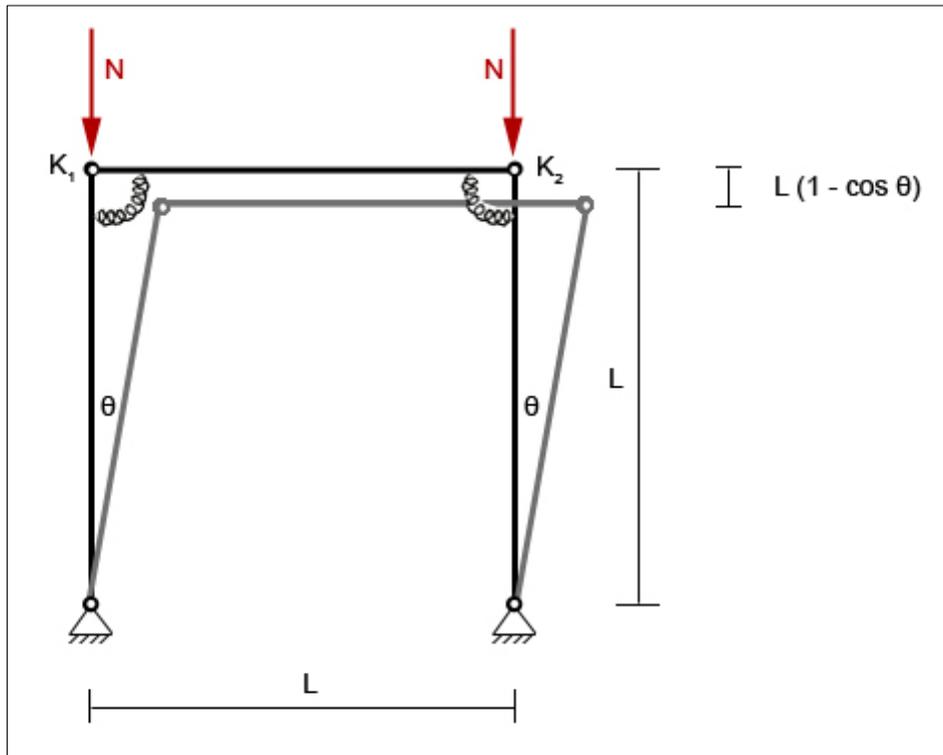


Figura 2.9

### Determinazione del carico critico

Nelle generica configurazione l'energia potenziale del sistema risulta pari a:

$$W_t(\theta) = \frac{1}{2}\theta^2(K_1 + K_2) - 2N(l - l\cos\theta)$$

Con il termine  $\frac{1}{2}\theta^2(K_1 + K_2)$  si indica l'energia potenziale elastica quando il sistema si allontana dalla sua configurazione di equilibrio, mentre con il termine  $-2N(l - l\cos\theta)$  si indica l'energia potenziale dovuta al lavoro che compiono le forze esterne al sistema.

Successivamente annullando la derivata prima dell'energia potenziale totale si cerca l'equazione che individua le configurazioni di equilibrio del sistema:

$$W_t'(\theta) = \theta(K_1 + K_2) - 2Nl \sin\theta = 0$$

da cui:

$$N = \frac{\theta(K_1 + K_2)}{2l \operatorname{sen}\theta}$$

Tutte le coppie di valori  $N - \theta$  che soddisfano la precedente equazione rappresentano stati di equilibrio:

- per  $\theta = 0$  l'equazione risulta soddisfatta per qualunque valore di  $N$  e quindi nel piano  $N - \theta$  tutti i punti dell'asse  $\theta = 0$  rappresentano stati di equilibrio. Tale curva rappresenta il *percorso fondamentale di equilibrio* (figura 2.11 – linea verde)
- per tutti gli altri valori  $\theta \neq 0$ , si ottiene il *percorso diramato di equilibrio* (figura 2.11 – linea blu)
- il punto di intersezione tra i due percorsi di equilibrio individua il *punto di biforcazione* ed il valore di  $N$  in tale punto è il *carico critico* in corrispondenza del quale si verifica la biforcazione del sistema (figura 2.11 – punto rosso)

In questo caso il valore del carico critico può essere determinato attraverso il limite per  $\theta \rightarrow 0$  nell'espressione di  $N$ , poiché per  $\theta = 0$  si otterrebbe una forma indeterminata:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} N = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta(K_1 + K_2)}{2l \operatorname{sen}\theta} = \frac{K_1 + K_2}{2l}$$

Il valore del carico critico per cui si verifica la biforcazione del sistema è:

$$N_{cr} = \frac{K_1 + K_2}{2l}$$

Di seguito per evidenziare entrambi i percorsi di equilibrio si riporta un caso numerico ( $K_1 = 1000 \text{ N/m}$ ,  $K_2 = 500 \text{ N/m}$  e  $l = 1 \text{ m}$ ).

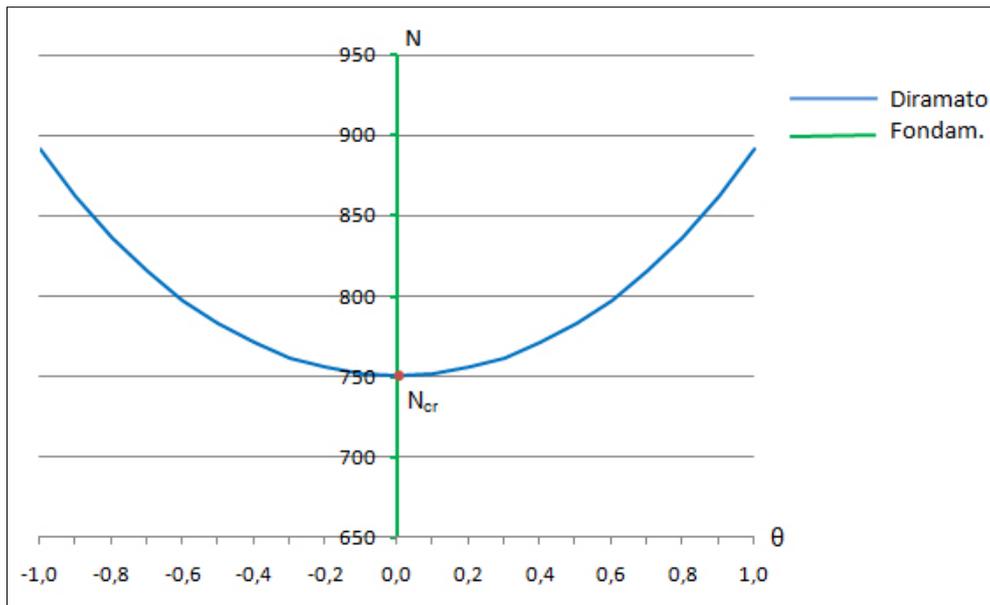


Figura 2.11

### ***Stabilità dei percorsi di equilibrio***

Per verificare la stabilità dei percorsi di equilibrio trovati si considera la derivata seconda dell'energia potenziale totale del sistema:

$$W_t''(\theta) = K_1 + K_2 - 2Nl \cos\theta$$

#### Percorso fondamentale di equilibrio

$$W_t''(0) = K_1 + K_2 - 2Nl > 0$$

$$N < \frac{K_1 + K_2}{2l} = N_{cr}$$

Il percorso fondamentale di equilibrio è definito positivo, quindi stabile, per valori del carico  $N$  inferiori al carico critico ( $N < \frac{K_1 + K_2}{2l}$ ) e definito negativo, quindi instabile, per i valori di  $N$  superiori al carico critico ( $N > \frac{K_1 + K_2}{2l}$ ).

#### Percorso diramato di equilibrio

$$W_t''(\theta) = K_1 + K_2 - 2Nl \cos\theta > 0$$

Avendo posto all'interno della derivata seconda dell'energia potenziale totale  $N = \frac{\theta(K_1+K_2)}{2l \operatorname{sen}\theta}$  (equazione che individua le configurazioni di equilibrio del sistema) si ottiene:

$$(K_1 + K_2) (1 - \theta \cotg\theta) > 0$$

Tale diseguaglianza è sempre verificata per ogni valore di  $\theta$  ( $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ), quindi i punti del percorso diramato di equilibrio sono punti di equilibrio stabile.

### Punto di biforcazione

Avendo posto all'interno della derivata seconda dell'energia potenziale totale  $N = \frac{K_1+K_2}{2l}$  (valore del carico  $N$  nel punto di biforcazione) si ottiene:

$$W_t''(0) = 0 \quad W_t'''(0) = 0 \quad W_t^{IV}(0) = K_1 + K_2 > 0$$

Essendo la derivata quarta dell'energia potenziale definita positiva, il punto in cui si verifica la biforcazione è un punto di equilibrio stabile.

Tutte le strutture che presentano un percorso di equilibrio diramato del tipo di quello esaminato vengono dette strutture a comportamento *post-critico simmetrico stabile*.

Si nota che il comportamento globale del sistema è di tipo *hardening*, richiedendo l'aumento di deformazione un ulteriore aumento del carico esterno.

### Imperfezione iniziale $\theta_0$

Consideriamo ora il caso in cui nel sistema sia presente una imperfezione iniziale costituita da una piccola inclinazione  $\theta_0$  delle aste verticali rispetto alla configurazione verticale.

Nelle generica configurazione l'energia potenziale del sistema risulta pari a:

$$W_t(\theta; \theta_0) = \frac{1}{2}(K_1 + K_2)(\theta - \theta_0)^2 - 2Nl(1 - \cos\theta) + 2Nl(1 - \cos\theta_0)$$

da cui:

$$W_t(\theta; \theta_0) = \frac{1}{2}(K_1 + K_2)(\theta - \theta_0)^2 + 2Nl(\cos\theta - \cos\theta_0)$$

Eseguendo ora lo sviluppo in serie di Taylor di  $\cos\theta_0$  fino al quarto ordine (consentito perché si è assunto piccolo il valore dell'imperfezione) si ottiene:

$$W_t(\theta; \theta_0) = \frac{1}{2}(K_1 + K_2)(\theta^2 - 2\theta\theta_0 + \theta_0^2) + 2Nl\left(\cos\theta - 1 - \frac{\theta_0^4}{24} + \frac{\theta_0^2}{2}\right)$$

Supponiamo ora che  $\theta_0$  sia così piccolo che sia lecito trascurare rispetto al termine in  $\theta\theta_0$  tutti i termini che contengono una potenza di  $\theta_0$  superiore alla prima. Sotto queste ipotesi l'energia potenziale del sistema si riduce alla seguente relazione:

$$W_t(\theta; \theta_0) = \frac{1}{2}(K_1 + K_2)(\theta^2 - 2\theta\theta_0) + 2Nl(\cos\theta - 1)$$

Derivando ora l'energia potenziale totale rispetto a  $\theta$  e ponendo uguale a zero tale espressione si ottiene l'equazione che individua le configurazioni di equilibrio del sistema in funzione di  $\theta$  e  $\theta_0$ :

$$W_t(\theta; \theta_0) = (K_1 + K_2)(\theta - \theta_0) - 2Nl \operatorname{sen}\theta$$

da cui:

$$N = \frac{(K_1 + K_2)(\theta - \theta_0)}{2l \operatorname{sen}\theta}$$

Di seguito per evidenziare i percorsi di equilibrio si riporta un caso numerico ( $K_1 = 1000 \text{ N/m}$ ,  $K_2 = 500 \text{ N/m}$ ,  $l = 1 \text{ m}$  e  $\theta_0 = \frac{n\pi}{100}$  per  $n = -5, -4, \dots, 4, 5$ ).

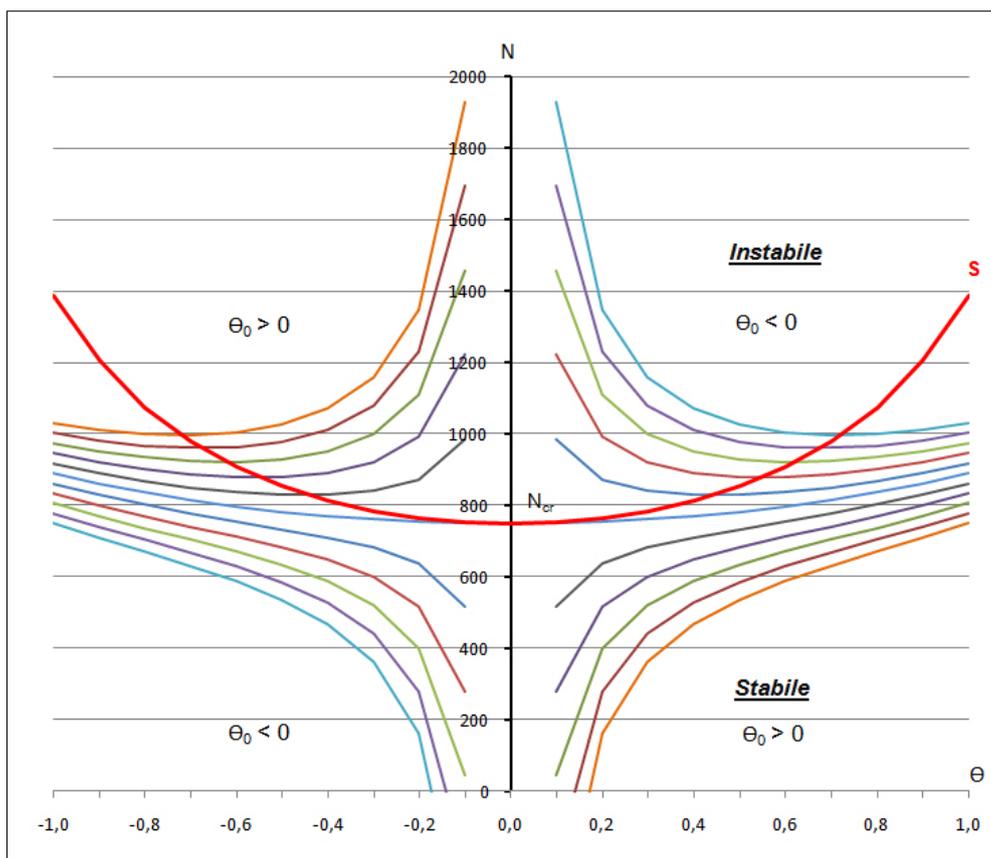


Figura 2.12

Si osservi che l'equazione di equilibrio trovata nel caso dell'imperfezione è simile a quella senza l'imperfezione a meno di un termine  $\theta_0$  che rappresenta proprio l'imperfezione iniziale imposta:

$$N = \frac{\theta(K_1 + K_2)}{2l \sin\theta}$$

$$N = \frac{(K_1 + K_2)(\theta - \theta_0)}{2l \sin\theta}$$

Nel diagramma di figura 2.12 si osservano quattro famiglie di curve, due corrispondenti a  $\theta_0 > 0$  e due corrispondenti a  $\theta_0 < 0$ .

Alle curve che intercettano l'asse orizzontale si dà il nome di *percorsi di equilibrio naturale*, mentre alle altre di *percorsi di equilibrio non naturale*. Ad ogni valore di  $\theta_0$  corrisponde una curva di equilibrio naturale ed una di equilibrio non naturale.

In fine diagrammando la funzione  $\frac{d^2W_t}{d\theta^2} = K_1 + K_2 - 2Nl \cos\theta = 0$  si ottiene la curva S (figura 2.12 – linea rossa) che divide il piano due parti: in una l'equilibrio è stabile nell'altra instabile. I punti situati all'interno della curva S risultano di equilibrio instabile  $\frac{d^2W_t}{d\theta^2} < 0$ , mentre i punti situati al di fuori risultano di equilibrio stabile  $\frac{d^2W_t}{d\theta^2} > 0$ .

### Analisi dell'instabilità al variare dei parametri $K_1$ e $K_2$

Si analizza ora l'instabilità del telaio al variare dei parametri  $K_1$  e  $K_2$ , con i quali vengono identificati i dispositivi di scarsa rigidità attraverso cui la traversa del telaio è collegata alle colonne verticali.

In base alla simmetria del sistema vengono considerati i seguenti tre casi, ove fissato il valore massimo di  $K_1$ , si varia  $K_2$  fino a  $K_1$ :

- $K_1 > K_2$  (con  $K_1 = 1000$  N/m e  $K_2 = 500$  N/m)
- $K_1 = K_2 = K$  (con  $K_1 = K_2 = K = 1000$  N/m)
- $K_1 \gg K_2$  (con  $K_1 = 1000$  N/m e  $K_2 = 10$  N/m)

In queste tre situazioni è semplice verificare che l'andamento dei percorsi di equilibrio resta immutato, rimanendo il sistema *post-critico simmetrico stabile* (figura 2.13).

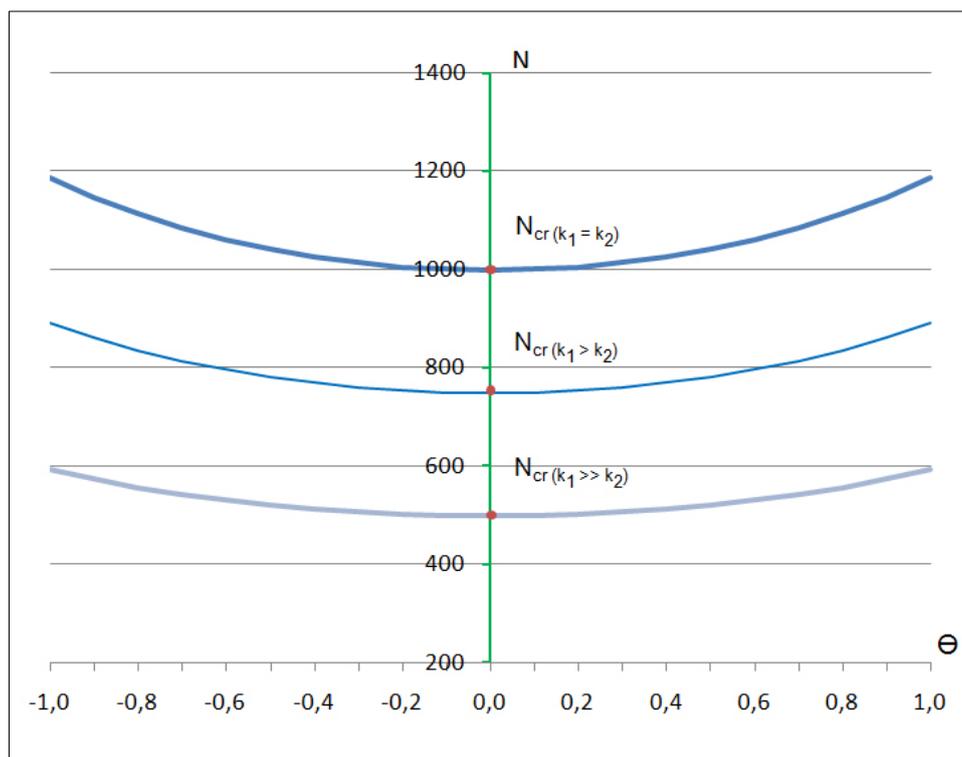


Figura 2.13

Il variare dei parametri  $K_1$  e  $K_2$  si ripercuote solo sul valore del carico critico e sulla determinazione delle aree di equilibrio stabile ed instabile nel piano  $N - \theta$  (figura 2.13):

Per  $K_1 > K_2$  il carico critico è pari a  $\rightarrow N_{cr} = \frac{K_1 + K_2}{2l} = 750 \text{ N}$

Per  $K_1 = K_2 = K$  il carico critico è pari a  $\rightarrow N_{cr} = \frac{K}{l} = 1000 \text{ N}$

Per  $K_1 \gg K_2$  il carico critico è pari a  $\rightarrow N_{cr} = \frac{K_1}{2l} = 500 \text{ N}$

(si è considerato  $l$  di lunghezza unitaria)

Dai risultati ottenuti, essendo in questo caso il carico critico proporzionale alla media delle due rigidezze, si nota che quando  $K_1 \gg K_2$  il carico critico è determinato in maniera prevalente dalla rigidezza del primo dispositivo di collegamento. Nel caso in cui invece  $K_1 > K_2$  il carico critico si distribuisce tra le due rigidezze in base al loro valore, risultando infine ugualmente ripartito tra i due dispositivi quando  $K_1 = K_2$ .

Si conclude quindi dalla precedente analisi che il sistema avente  $K_1 = K_2$  garantisce una maggiore sicurezza rispetto agli altri due casi, essendo caratterizzato da un maggiore carico critico.

## ||| Capitolo 3:

### Elementi strutturali bidimensionali

#### 3.1 Introduzione

Le piastre sono elementi strutturali aventi una dimensione piccola rispetto alle altre due. Tale dimensione è detta spessore  $s$ . La teoria a cui ci si riferisce in questo capitolo è quella di *Kirchhoff - Love* per piastre sottili. Questa teoria si basa sulle seguenti ipotesi che servono a precisare il campo di validità dei risultati che verranno ottenuti:

- si assume che i segmenti ortogonali e normali al piano medio della piastra, a deformazione avvenuta, restino ortogonali e normali al piano medio (l'ipotesi equivale a trascurare la deformazione dovuta al taglio);
- gli abbassamenti sono considerati piccoli rispetto allo spessore (in questo caso è lecito confondere le curvature della superficie elastica con le derivate seconde degli abbassamenti e gli angoli di inclinazione con la tangente);
- lo spessore della piastra è ipotizzato talmente piccolo, da dare possibilità di sviluppo di tensioni  $\sigma_z$  molto basse e quindi trascurabili;
- il materiale è considerato elastico, lineare ed isotropo.

Si consideri ora la piastra di figura 3.1 vincolata al contorno. Sia  $xy$  il piano medio della piastra e  $z$  l'asse ortogonale ad esso. La faccia superiore della piastra è soggetta ad un carico ripartito  $p(x,y)$  diretto lungo l'asse  $z$ .

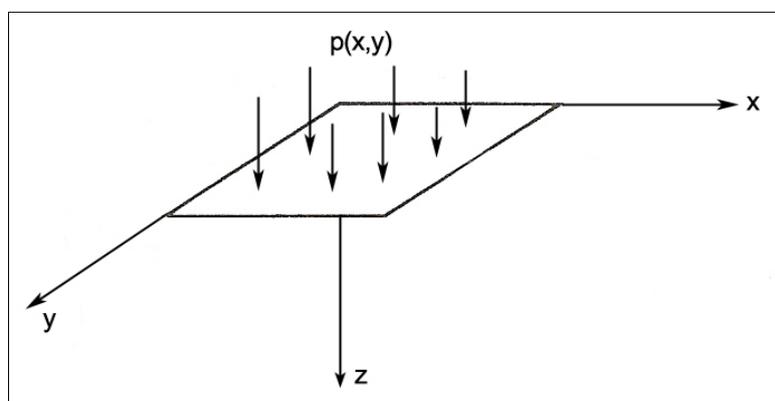


Figura 3.1

In base all'ipotesi cinematica di *Kirchhoff - Love* nella piastra si genera uno stato deformativo piano le cui tre componenti significative delle deformazione si possono esprimere come segue:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} z \\ \varepsilon_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} z \\ \gamma_{xy} = -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} z \end{cases}$$

Poiché il materiale è considerato elastico, lineare ed isotropo, allo stato deformativo della piastra corrisponde il seguente stato tensionale:

$$\begin{cases} \sigma_x = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \sigma_y = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ \tau_{xy} = -\frac{Ez}{1+\nu} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \end{cases}$$

Considerando un tratto di sezione di larghezza unitaria e di altezza pari allo spessore  $s$  (figura 3.2), si determinano le sollecitazioni risultanti, cioè le forze ed i momenti per unità di lunghezza agenti sulle sezioni normali agli assi  $x$  ed  $y$ , ricavate integrando rispetto allo spessore le tensioni.

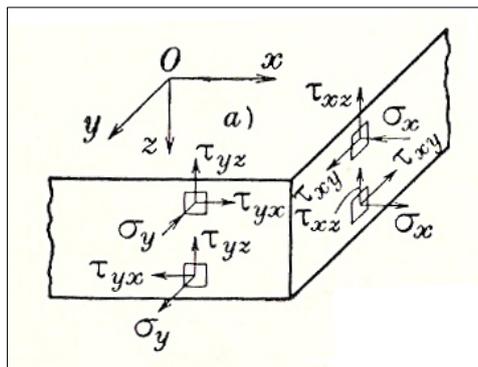


Figura 3.2

Le relazioni che si ottengono sono le seguenti:

$$\begin{cases} M_x = -B \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ M_y = -B \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ M_{xy} = -(1-\nu)B \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_x = -B \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ T_y = -B \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \end{cases}$$

dove il termine  $B$  viene definito rigidità flessionale della piastra ed è stato posto pari a:

$$B = \frac{E s^3}{12 (1 - \nu^2)}$$

Osservando la precedente relazione è facile notare l'analogia tra  $B$  e la rigidità flessionale  $EI$  nelle travi; si riconosce infatti nel rapporto  $\frac{s^3}{12}$  il momento d'inerzia di una sezione rettangolare di altezza pari allo spessore e di larghezza unitaria. Il termine  $(1 - \nu^2)$  a denominatore mostra che, a parità di condizioni di carico e di vincolo, le lastre hanno una rigidità flessionale leggermente maggiore rispetto alle travi per effetto della contrazione trasversale impedita.

Si determinano poi le equazioni di equilibrio considerando un elemento infinitesimo di lati  $dx$ ,  $dy$  e spessore  $s$  (figura 3.3).

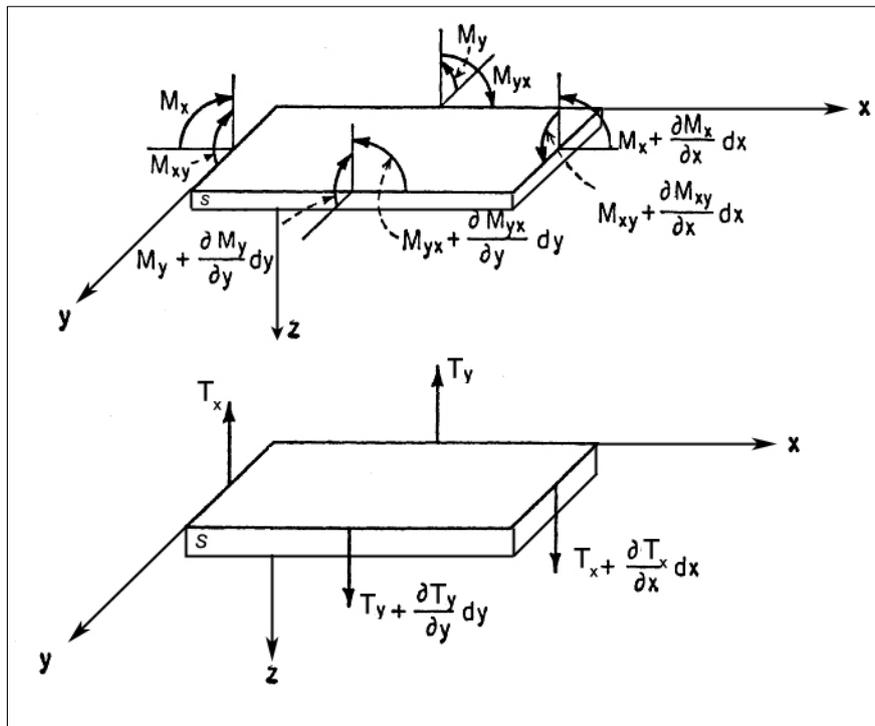


Figura 3.3

Le condizioni di equilibrio alla rotazione attorno all'asse  $x$  e all'asse  $y$  forniscono rispettivamente le seguenti relazioni:

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - T_y = 0$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - T_x = 0$$

La condizione di equilibrio alla traslazione nella direzione dell'asse z fornisce la seguente relazione:

$$\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} + p(x, y) = 0$$

Le rimanenti tre condizioni di equilibrio, alla rotazione intorno all'asse z ed alla traslazione nelle direzioni x ed y, risultano identicamente soddisfatte, dal momento che la piastra è stata supposta caricata da forze non appartenenti al piano medio.

Attraverso le espressioni precedentemente trovate è possibile giungere ad una equazione differenziale nella sola incognita  $w$ . Sostituendo infatti le  $T_x$  e le  $T_y$ , presenti nelle condizioni di equilibrio alla rotazione attorno all'asse x e all'asse y, nella condizione di equilibrio alla traslazione nella direzione dell'asse z, si ottiene la seguente equazione:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + p(x, y) = 0$$

Infine, introducendo le espressioni dei momenti  $M_x$ ,  $M_y$  e  $M_{yx}$  precedentemente ricavate, si ottiene la seguente equazione differenziale nell'unica incognita  $w$ :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x, y)}{B}$$

che facendo uso dell'operatore laplaciano può essere scritta in forma compatta:

$$\Delta^4 w = \frac{p(x, y)}{B}$$

L'equazione differenziale alle derivate parziali appena trovata descrive la superficie elastica della piastra e viene detta di *Lagrange*, il quale corresse la deduzione e la forma dell'equazione che nel 1815 *Sophie-Germain* aveva dedotto per la prima volta.

L'integrazione di tale equazione è possibile in modo esatto soltanto in un numero ristretto di casi. I metodi principali di integrazione per i casi più semplici e frequenti sono rappresentati dalle serie doppie (Navier), dalle serie semplici (Lévy) oppure dalle differenze finite (Marcus).

La soluzione completa del problema richiede che la funzione  $w$  rispetti le condizioni cinematiche al contorno imposte dai vincoli, ed essendo un'equazione differenziale alle derivate parziali del quarto ordine in  $x$  e del quarto ordine in  $y$ , le condizioni al contorno necessarie sono otto.

In particolare:

- se un tratto del contorno è perfettamente incastrato le condizioni di vincolo impongono che siano nulli sia la funzione  $w$  che la sua derivata nella direzione ortogonale al lato stesso;
- se un tratto del contorno è appoggiato le condizioni di vincolo impongono che siano nulli sia la funzione  $w$  sia il momento nella direzione ortogonale al lato stesso;
- se un tratto del contorno è libero le condizioni di vincolo impongono che in tutti i suoi punti del contorno siano nulli la reazione e il momento nella direzione ortogonale al lato stesso.

### 3.2 Descrizione del sistema

In questo capitolo si è ipotizzato di dover studiare attraverso la teoria delle piastre un sistema di pesatura di piccole-medie dimensioni. Questi sistemi sono costituiti in genere da piastre metalliche collocate a filo del pavimento alle quali sono applicate delle celle di carico elettriche (figura 3.4).

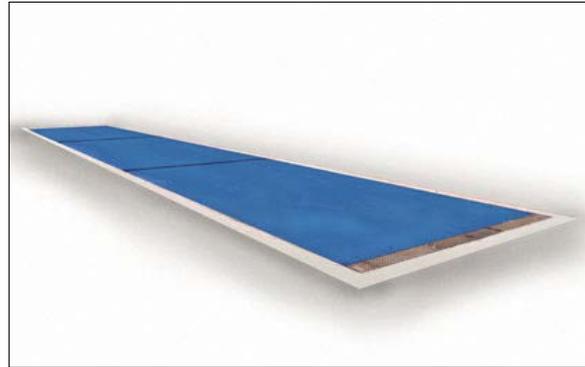


Figura 3.4 – Celle di carico

In base alle dimensioni che si trovano in commercio, si è ipotizzato di analizzare una piastra avente uno spessore di 5 cm, una larghezza di 3 m ed una lunghezza di 8 m. Il sistema così descritto è stato sottoposto ad un carico uniformemente ripartito su due rettangoli parziali avente lo scopo di simulare una generica situazione di carico che è possibile incontrare durante le operazioni di pesatura (figura 3.5).

Di solito sistemi di pesatura di queste dimensioni hanno portate massime di circa 500 kN. In base a quest'ultimo dato, si è deciso di suddividere la portata massima ugualmente sulla superficie dei due rettangoli parziali. Le dimensioni di questi rettangoli sono le seguenti: larghezza 30 cm e lunghezza 6 m. La superficie totale è pari a 1,8 m<sup>2</sup>. In base a questi valori, il carico ripartito su ciascun rettangolo è pari a 0,138 MPa.

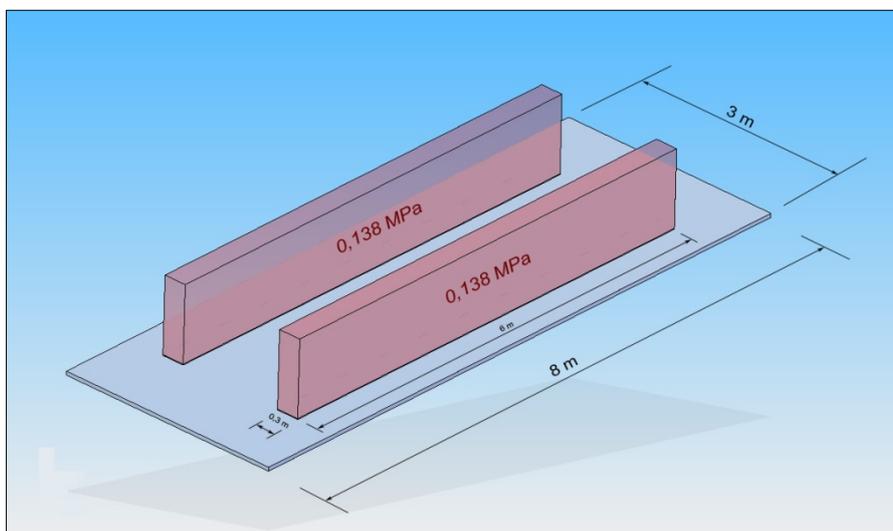


Figura 3.5 – Schema sistema di pesa

### 3.3 Piastra con carico uniformemente ripartito su due rettangoli parziali

Si schematizza il sistema descritto nel paragrafo precedente come un rettangolo di dimensione longitudinale  $a$ , trasversale  $b$  e spessore  $s$ , appoggiato su ogni lato e sottoposto ad un carico uniformemente ripartito  $p$  su due rettangoli parziali (figura 3.6).

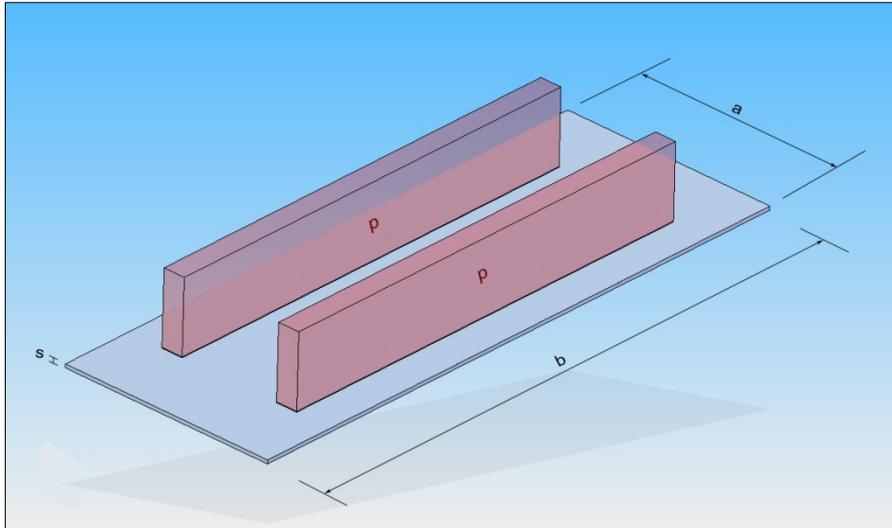


Figura 3.6 – Schema sistema

Questo problema può essere risolto affrontato tre fasi diverse:

- I. la prima considera gli effetti dovuti al carico ripartito  $p$  sul rettangolo di destra;
- II. la seconda considera gli effetti dovuti al carico ripartito  $p$  sul rettangolo di sinistra;
- III. la terza determina l'andamento globale della deformata mediante la sovrapposizione degli effetti dei due casi precedenti.

Si premette che i risultati che si otterranno dall'analisi separata dei due carichi  $p$  sono simmetricamente uguali essendo il sistema stesso simmetrico.

La piastra è realizzata con un acciaio inox AISI 304 ( $\sigma_s = 250$  MPa,  $E = 210$  GPa,  $\nu = 0,33$ ).

### 1) Carico uniformemente ripartito $p$ sul rettangolo parziale di sinistra della piastra

Per risolvere il problema bisogna integrare l'equazione di Lagrange con le opportune condizioni al contorno.

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x, y)}{B}$$

Poiché la piastra è appoggiata sul perimetro, si impone su ciascun lato che lo spostamento verticale e il momento nella direzione ortogonale al lato stesso siano nulli:

$$\text{Lato AB} \begin{cases} w(x, 0) = 0 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x, 0) = 0 \end{cases} \quad \text{Lato AD} \begin{cases} w(0, y) = 0 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0, y) = 0 \end{cases}$$

$$\text{Lato CD} \begin{cases} w(x, b) = 0 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x, b) = 0 \end{cases} \quad \text{Lato BC} \begin{cases} w(a, y) = 0 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(a, y) = 0 \end{cases}$$

Si assume il riferimento centrato nel punto di intersezione del lato AB e AD con gli assi diretti come in figura 3.7:

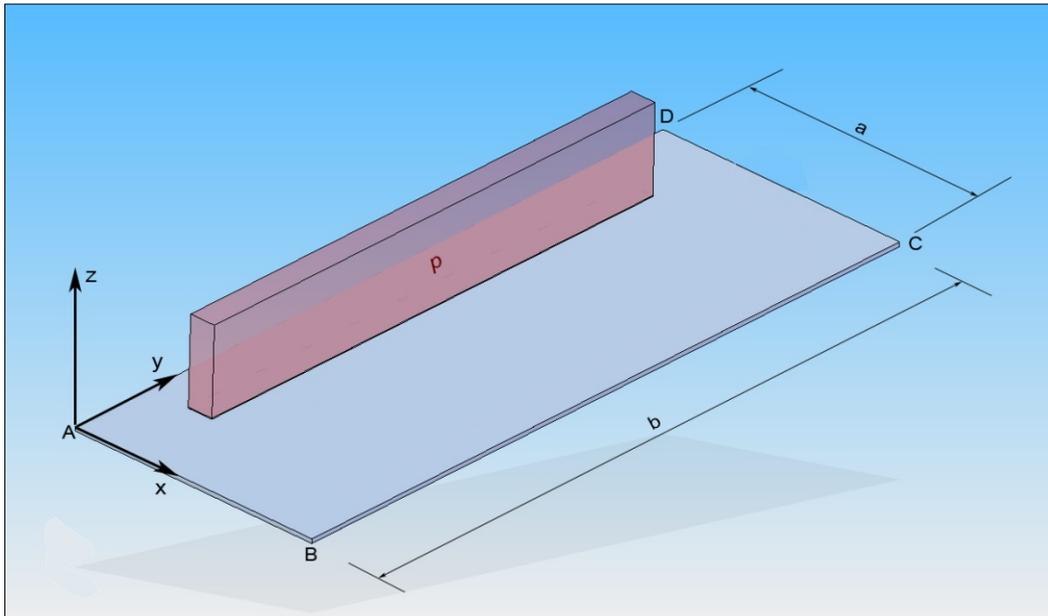


Figura 3.7 – Assi di riferimento del sistema

Una delle prime soluzioni a questo tipo di problema fu data da Navier, che dimostrò la possibilità di risolvere l'equazione di Lagrange nel caso di piastra appoggiata soggetta ad un carico ripartito uniformemente  $p$  su tutta la superficie, esprimendo lo spostamento  $w(x, y)$  mediante sviluppo in serie doppie di Fourier ( $m, n = 1, 3, 5, \dots$ ):

$$w(x, y) = \frac{16 p}{\pi^6 B} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen} \left( \frac{m\pi x}{a} \right) \text{sen} \left( \frac{n\pi y}{b} \right)}{mn \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}$$

Per quanto riguarda invece la situazione di un carico uniformemente ripartito  $p$  su di un rettangolo parziale limitato da due rette di ascisse  $\xi_1$  e  $\xi_2$  e da due rette di ordinate  $\eta_1$  e  $\eta_2$ , (figura 3.8)

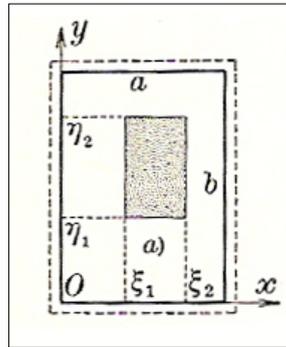


Figura 3.8

l'equazione della superficie elastica opportunamente modificata diviene ( $m, n = 1, 2, 3, \dots$ ):

$$w(x, y) = \frac{4 p}{\pi^6 B} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen} \left( \frac{m\pi x}{a} \right) \text{sen} \left( \frac{n\pi y}{b} \right)}{mn \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \left( \cos \left( \frac{m\pi \xi_1}{a} \right) - \cos \left( \frac{m\pi \xi_2}{a} \right) \right) \left( \cos \left( \frac{n\pi \eta_1}{b} \right) - \cos \left( \frac{n\pi \eta_2}{b} \right) \right)$$

Una volta nota la formulazione della superficie elastica si può passare all'implementazione numerica del problema mediante un programma di calcolo matematico.

Ricordando i valori numerici del problema (tabella 3.1), si riporta in figura 3.9 l'andamento della deformata della piastra.

	Valori
<b>a</b>	3 m
<b>b</b>	8 m
<b>s</b>	5 cm
$\xi_1$	0,5 m
$\xi_2$	0,8 m
$\eta_1$	1 m
$\eta_2$	7 m
<b>p</b>	0,138 MPa
<b>E</b>	210 GPa
<b>v</b>	0,33

Tabella 3.1 – Valori numerici

Si evidenzia che nella simulazione numerica entrambe le sommatorie della serie doppia di Fourier sono state troncate ai primi 10 termini, ottenendo un'approssimazione sufficientemente accurata.

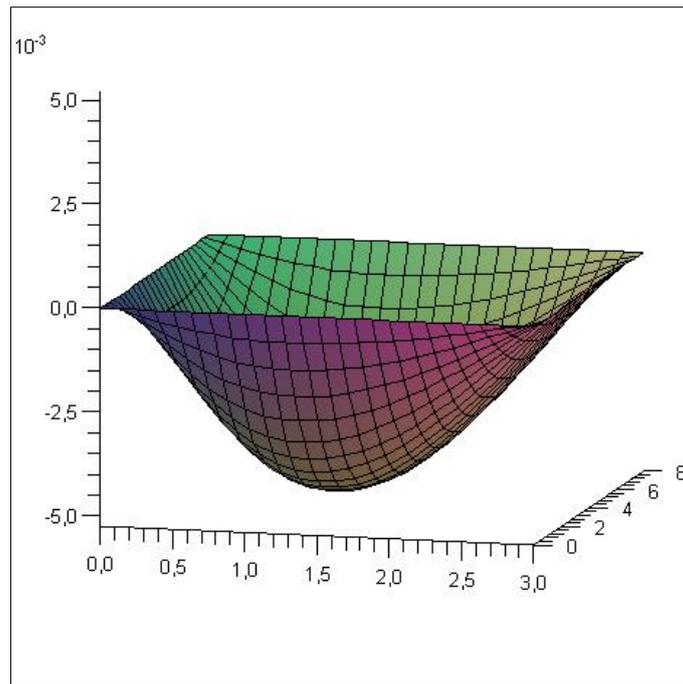


Figura 3.9 – Andamento deformato

Dalla figura 3.9 si può notare che la deformata ottenuta non è simmetrica, ma presenta una leggera inclinazione verso l'origine degli assi, cosa intuibile a priori dal posizionamento del carico  $p$  solamente sul rettangolo parziale di sinistra della piastra.

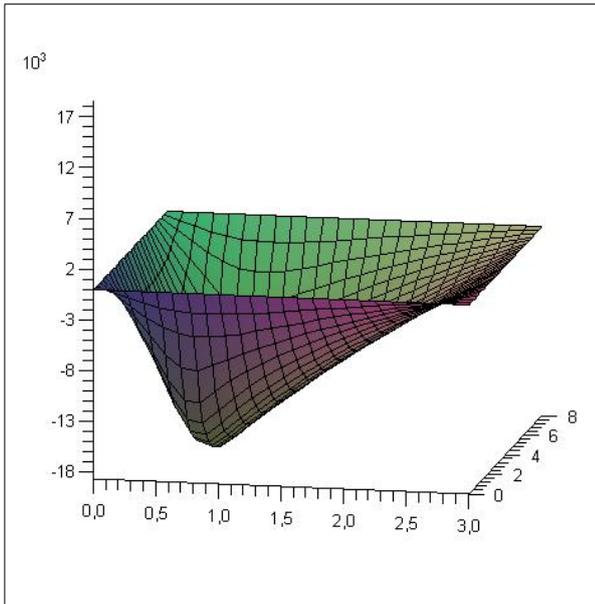
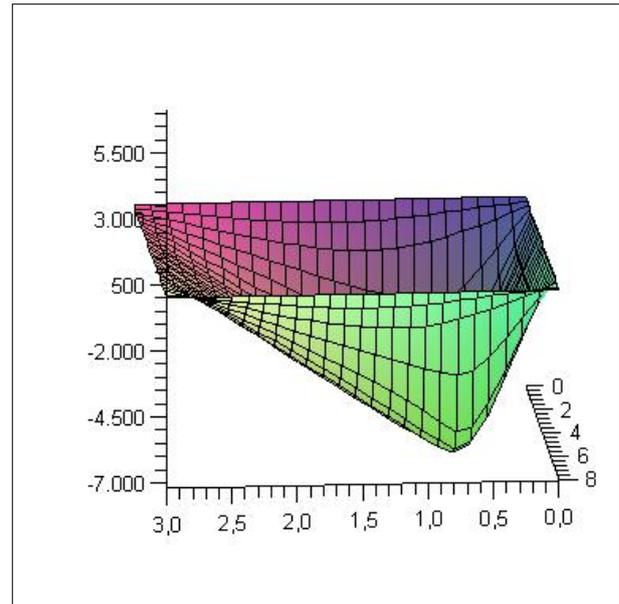
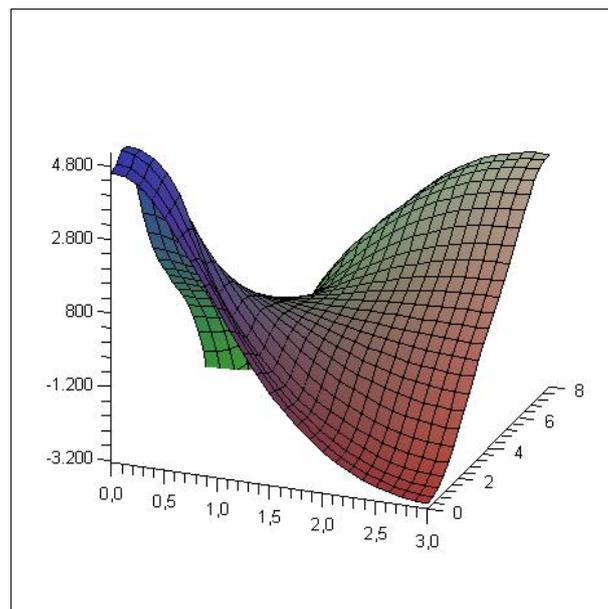
Attraverso il software di calcolo matematico, è stato calcolato lo spostamento massimo nel punto di coordinate  $x = 1,3$  m ed  $y = 4$  m pari a:

$$w_{max} = -5,2 \text{ mm}$$

Una volta nota la superficie elastica  $w(x,y)$  è possibile calcolare i valori del momento flettente  $M_x$  ed  $M_y$  sulle sezioni normali ad  $x$  ed  $y$ , il momento misto o di scorrimento  $M_{xy}$  e del taglio  $T_x$  e  $T_y$  tramite le seguenti relazioni.

$$\begin{cases} M_x = -B \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ M_y = -B \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ M_{xy} = -(1 - \nu) B \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{cases} \quad \begin{cases} T_x = -B \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ T_y = -B \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \end{cases}$$

In figura 3.10, 3.11, 3.12, si riportano gli andamenti dei momenti (entrambe le sommatorie della serie doppia di Fourier sono state troncate in questo caso ai primi 50 termini):

Figura 3.10 – Andamento  $M_x$ Figura 3.11 - Andamento  $M_y$ Figura 3.12 - Andamento  $M_{xy}$

In figura 3.13 e 3.14 si riportano gli andamenti del taglio:

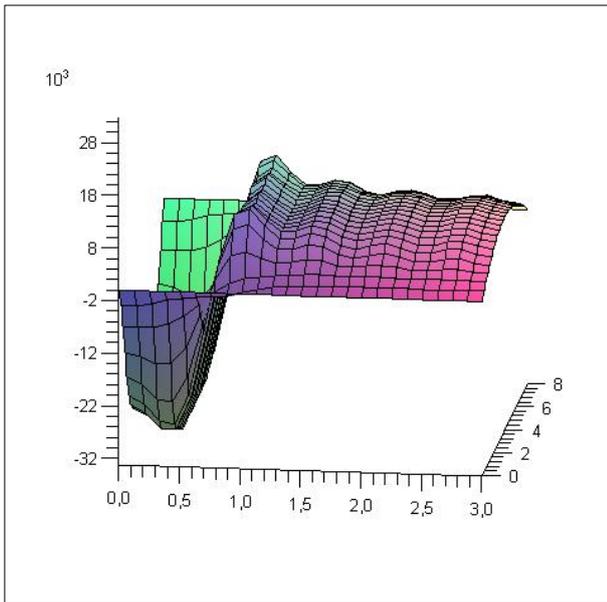


Figura 3.13 – Andamento  $T_x$

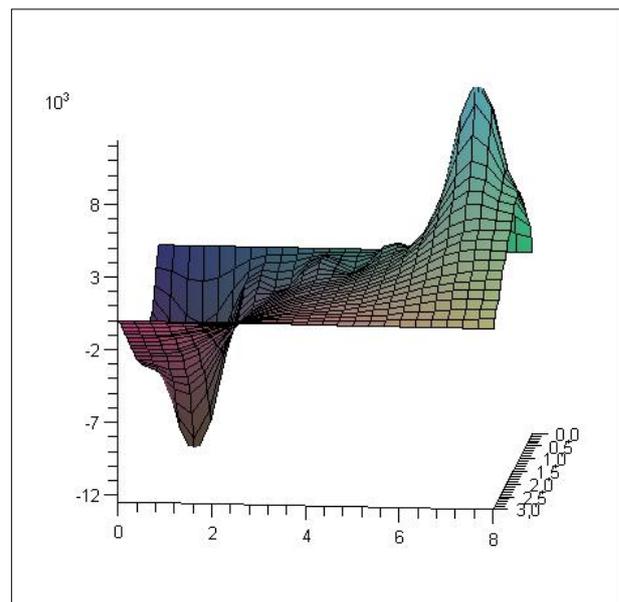


Figura 3.14 - Andamento  $T_y$

Con le informazioni sulla deformata è ora possibile calcolare le tensioni agenti nella struttura necessarie per poter effettuare una verifica di resistenza.

Utilizzando le formule riportate nel paragrafo introduttivo è possibile valutare le tensioni rispettivamente a distanza  $z = \pm \frac{s}{2}$  dalla superficie media:

$$\begin{cases} \sigma_x = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \sigma_y = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ \tau_{xy} = -\frac{Ez}{1+\nu} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \end{cases}$$

Successivamente facendo uso delle relazioni del cerchio di Mohr si riportano i valori alle tensioni principali  $\sigma_{max}$  e  $\sigma_{min}$ :

$$\begin{cases} \sigma_{max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ \sigma_{min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} \end{cases}$$

Infine applicando un criterio di resistenza, ad esempio quello di Von Mises per uno stato di tensione piana, si calcola la tensione equivalente da confrontare con quella limite del materiale:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_{max}^2 + \sigma_{min}^2 - \sigma_{max} \cdot \sigma_{min}}$$

In entrambi i casi  $z = \pm \frac{s}{2}$  la  $\sigma_{eq}^{max} = 38,65$  Mpa.

In figura 3.15 si riporta graficamente l'andamento della  $\sigma_{eq}^{max}$ :

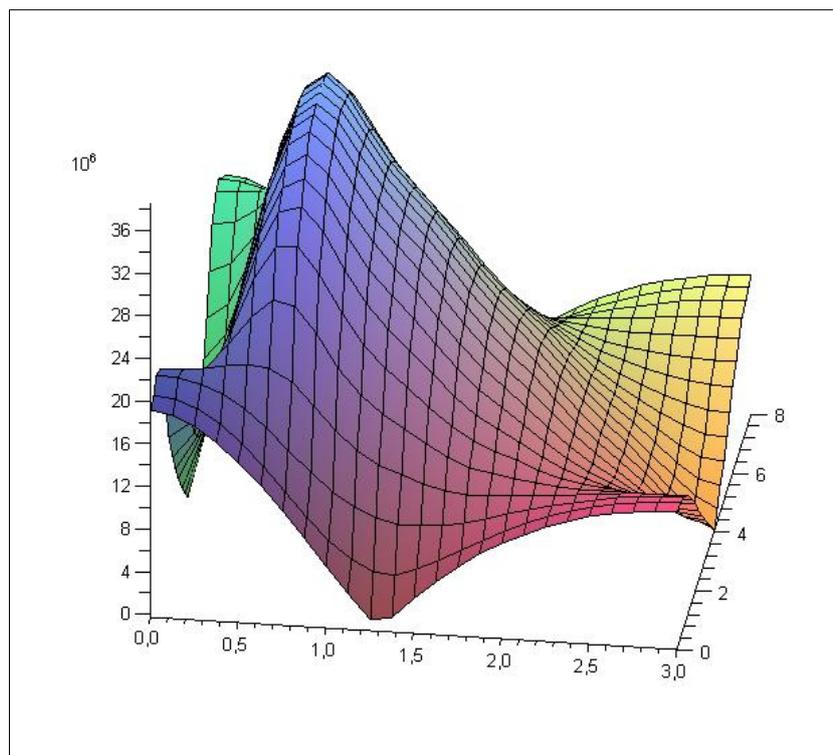


Figura 3.15 – Andamento  $\sigma_{eq}$

In figura 3.15 si può notare che la distribuzione della  $\sigma_{eq}^{max}$  non è simmetrica, ma presenta un massimo verso l'origine degli assi causato dal posizionamento del carico  $p$  solamente sul rettangolo parziale di sinistra della piastra.

**II) Carico uniformemente ripartito  $p$  sul rettangolo parziale di destra della piastra**

Come detto in precedenza, i risultati della seguente analisi sono simmetricamente uguali a quelli del caso precedente.

Si riportano di seguito (figura 3.16 e 3.17) solo in via qualitativa gli andamenti della deformata e della  $\sigma_{eq}^{max}$ .

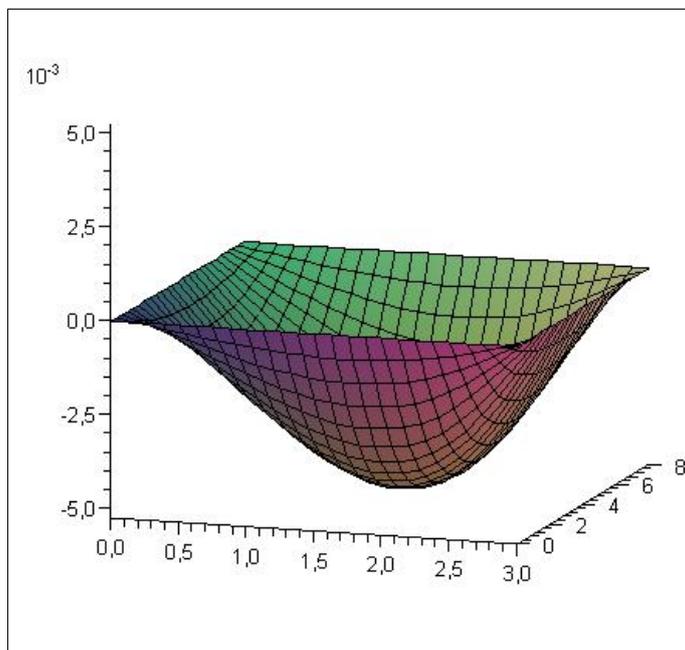


Figura 3.16 – Andamento deformata

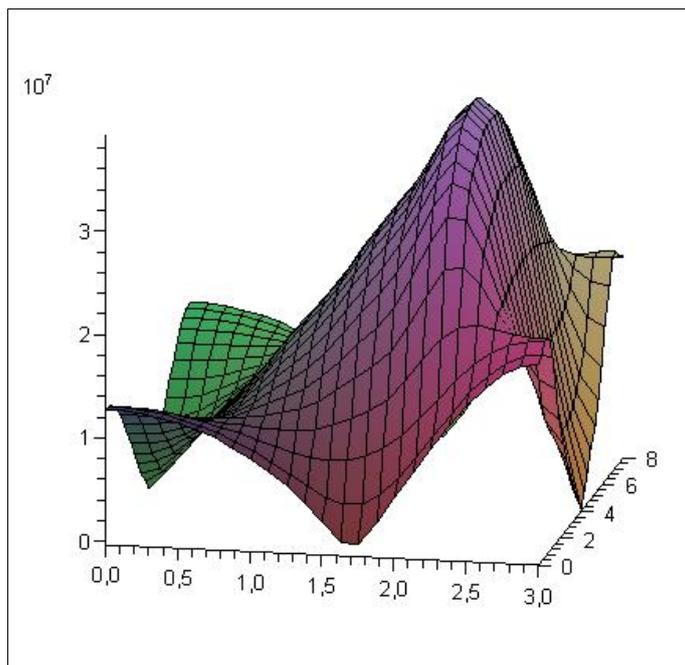


Figura 3.17 - Andamento  $\sigma_{eq}$



### III) Sovrapposizione degli effetti

La soluzione del problema come detto può essere determinata mediante sovrapposizione degli effetti, considerando le due soluzioni elementari relative al carico  $p$  una volta a destra ed una volta a sinistra.

Di seguito in figura 3.18 si riporta l'andamento globale della deformata:

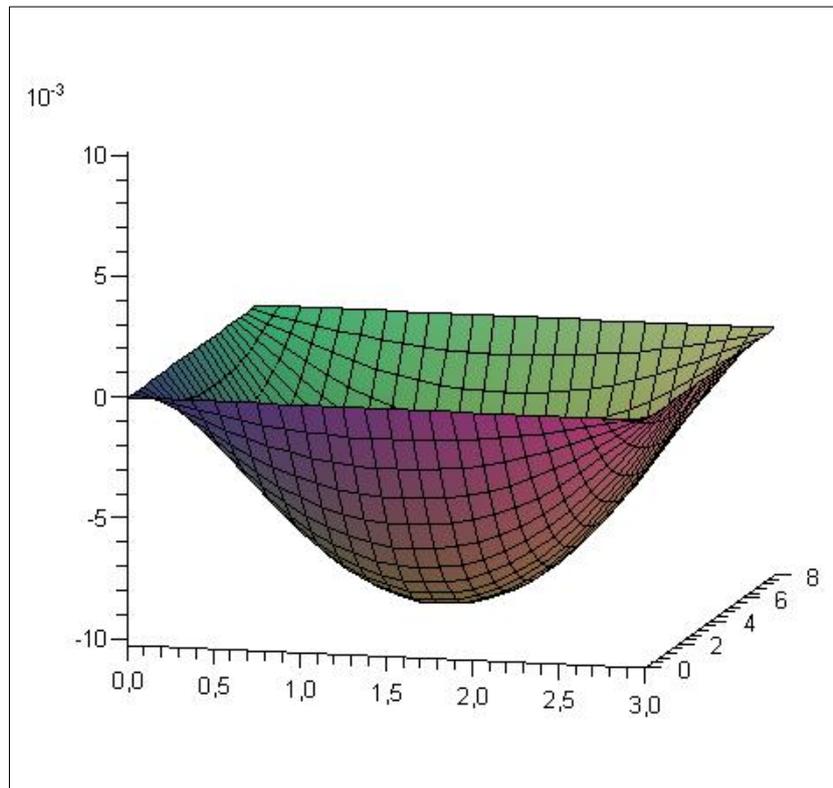


Figura 3.18 – Andamento deformata

Attraverso il software di calcolo matematico è stato calcolato lo spostamento massimo nel punto di coordinate  $x = 1,5$  m ed  $y = 4$  m pari a:

$$w_{max} = - 10,2 \text{ mm}$$

In questo caso la deformata è simmetrica.

Una volta nota la superficie elastica  $w(x,y)$  è possibile calcolare i valori del momento flettente  $M_x$  ed  $M_y$  sulle sezioni normali ad  $x$  ed  $y$ , il momento misto o di scorrimento  $M_{xy}$  e del taglio  $T_x$  e  $T_y$  tramite le seguenti relazioni.

In figura 3.19, 3.20, 3.21, si riportano gli andamenti dei momenti:

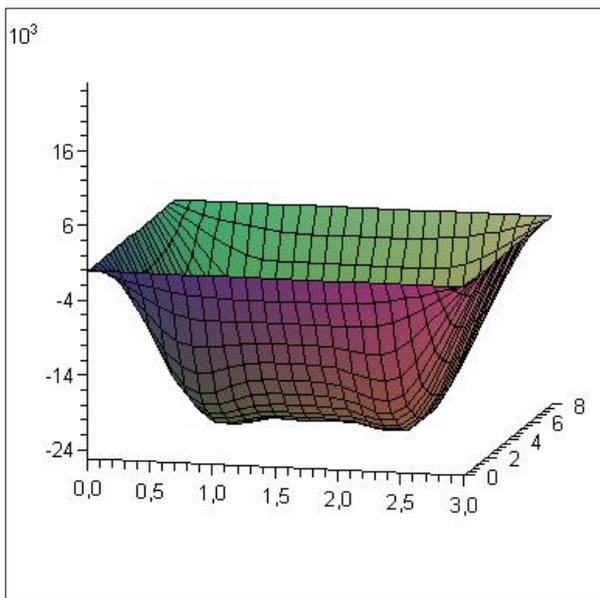


Figura 3.19 – Andamento  $M_x$

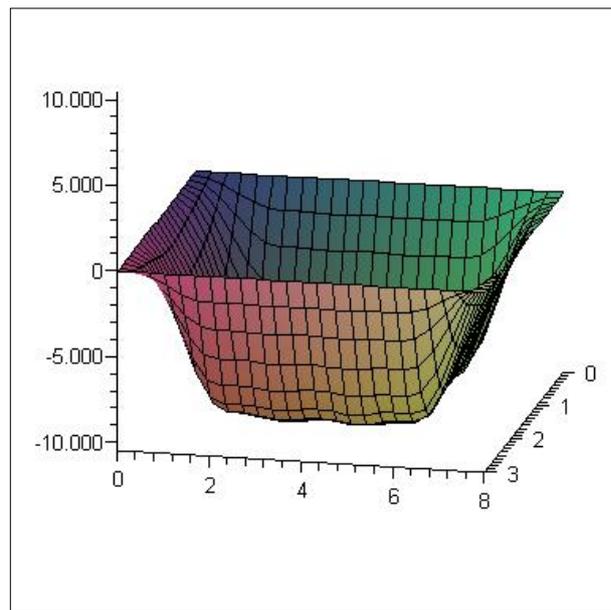


Figura 3.20 - Andamento  $M_y$

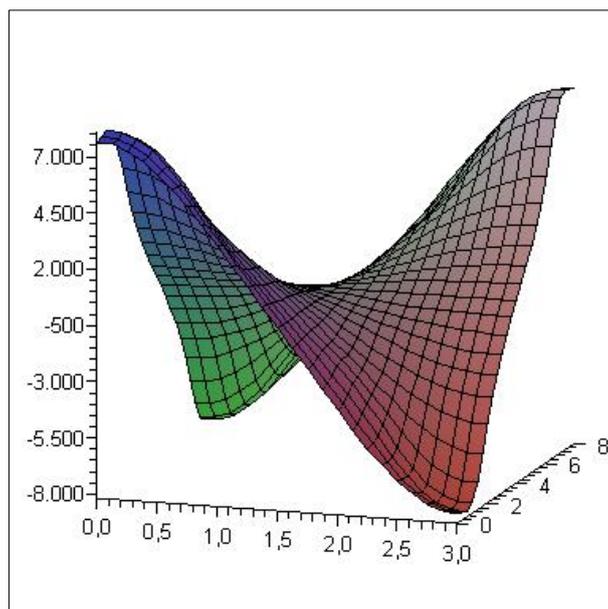


Figura 3.21 - Andamento  $M_{xy}$

In figura 3.22 e 3.23 si riportano gli andamenti del taglio:

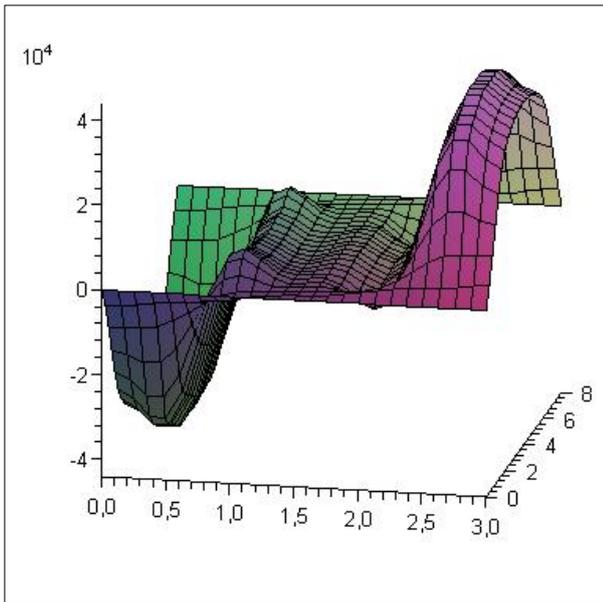


Figura 3.22 – Andamento  $T_x$

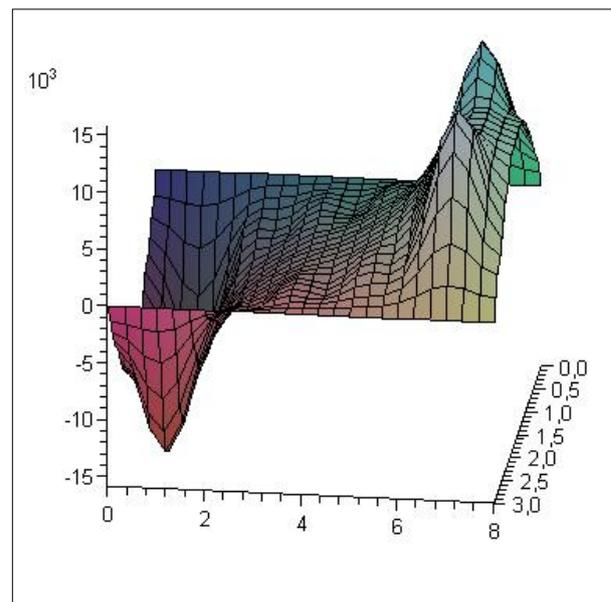


Figura 3.23 - Andamento  $T_y$

Come precedentemente fatto si calcola la  $\sigma_{eq}^{max} = 51,64$  Mpa e si riporta in figura 3.21 il suo andamento:

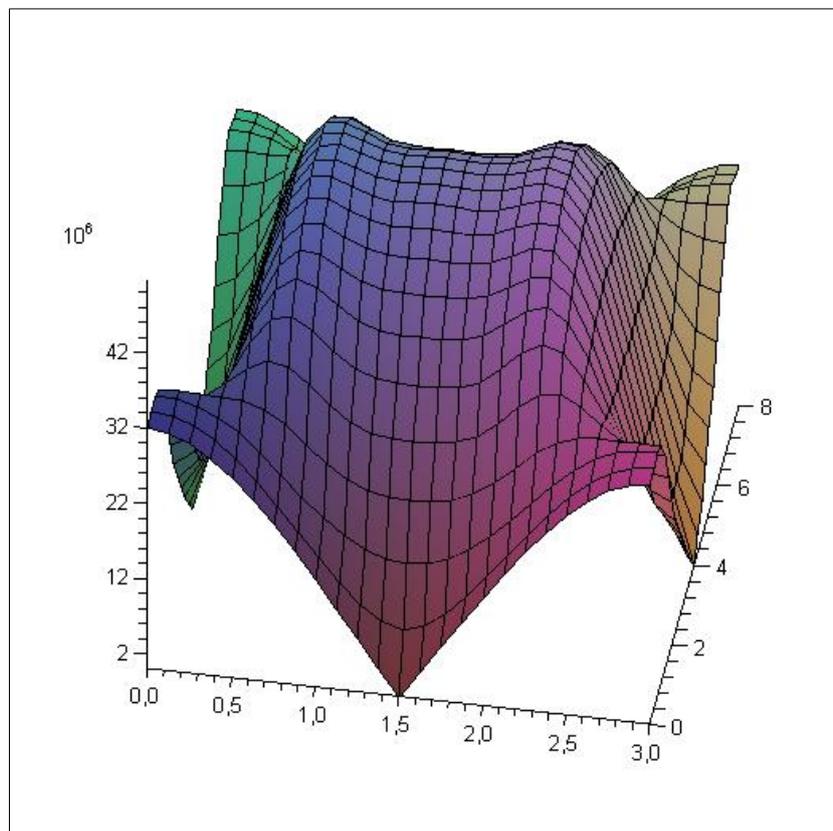


Figura 3.24 - Andamento  $\sigma_{eq}$

In questo caso la distribuzione della  $\sigma_{eq}^{max}$  è simmetrica come la deformata.

Confrontando la  $\sigma_{eq}^{max}$  con la tensione ammissibile del materiale si ricava il seguente coefficiente di sicurezza:

$$X = \frac{\sigma_s}{\sigma_{eq}^{max}} = \frac{250}{51,64} \approx 5$$

che ci conferma che la struttura è ben progettata e può resistere al carico a cui l'abbiamo sottoposta.



## ||| Capitolo 4:

### Metodi probabilistici per le verifiche strutturali

#### 4.1 Introduzione

Negli ultimi anni la teoria delle strutture, grazie allo sviluppo di nuove tecniche numeriche rese possibili dalla diffusione degli elaboratori elettronici, ha fatto notevoli passi avanti, sicché si può dire che siamo in grado di risolvere qualsiasi problema ben posto, ma spesso mancano proprio i dati di partenza per porre bene il problema. Questa situazione non potrà cambiare se non si comprende che i dati relativi ai carichi ed ai materiali sono aleatori e si possono quindi descrivere, ma non determinare, né tanto meno prefissare se non entro certi limiti.

In tale ambito si inseriscono i metodi probabilistici per le verifiche strutturali, che hanno l'obiettivo principale di razionalizzare le scelte e permettere un confronto tra le possibili alternative.

In tali metodi la verifica consiste nel confronto tra una grandezza  $S$  detta "sollecitazione" ed una grandezza  $R$  detta "resistenza". Questo confronto può essere formulato in vari termini, ad esempio: in termini di caratteristiche di sollecitazione (momento agente e resistente), in termini di carichi (forza applicata e carico limite) e in termini di tensioni (massima tensione e tensione di snervamento del materiale). A seconda dei casi la scelta di una o l'altra formulazione può essere più o meno conveniente poiché ciascuna formulazione separa diversamente le variabili in gioco e quindi le fonti di incertezza. In ogni caso si deve formulare una disequaglianza che definisce un dominio di successo e un dominio di insuccesso  $U$  (Unsafe region) separati da una frontiera critica. Per assicurare la sicurezza di una struttura il punto  $(R,S)$  deve cadere nel dominio di successo ed essere distante dalla frontiera critica di un opportuno margine: cioè la probabilità di crisi della struttura ( $P_{fail}$ ) deve essere sufficientemente piccola da garantire la sicurezza.

In tale sede verranno messi a confronto i risultati ottenuti mediante tre diverse tipologie di verifica strutturale:

- *Metodo deterministico (Livello 0)*
- *Metodo semi-probabilistico (Livello 1)*
- *Metodo probabilistico (Livello 2)*

Il Metodo deterministico è il metodo più utilizzato nelle procedure correnti e consiste nel confronto tra la tensione di snervamento del materiale e la massima tensione agente sulla sezione più sollecitata della struttura. Da tale confronto si ricava il coefficiente di sicurezza della struttura.

Il Metodo semi-probabilistico, detto anche “Metodo Europeo”, poiché è stato adottato nelle raccomandazioni internazionali di molte organizzazioni soprattutto europee, consiste invece nel confronto tra due valori convenzionali della resistenza  $R^*$  e della sollecitazione  $S^*$ , detti appunto valori di calcolo. Per definire tali valori si introduce il concetto di frattile  $K$  di una distribuzione di probabilità.

Il Metodo probabilistico, detto anche “Metodo Americano”, poiché adottato in alcune normative americane, si basa esclusivamente sulla conoscenza del valor medio e della deviazione standard di una variabile aleatoria.

Il Metodo semi-probabilistico viene considerato al primo livello probabilistico (Livello 1), perché per ogni grandezza aleatoria viene introdotto appunto un solo valore probabilistico, il frattile. Il Metodo probabilistico invece viene considerato al secondo livello probabilistico (Livello 2), perché per ogni grandezza aleatoria vengono introdotti due valori definiti probabilisticamente, il valor medio e la deviazione standard.



## 4.2 Descrizione delle struttura

Si consideri la trave illustrata in figura 4.1, di lunghezza  $3L$ , incernierata nell'estremo A ed appoggiata nel punto C. Su di essa agisce nel punto B un carico concentrato di tipo deterministico  $F$  ed un carico distribuito di tipo aleatorio  $p$  nel tratto CD.

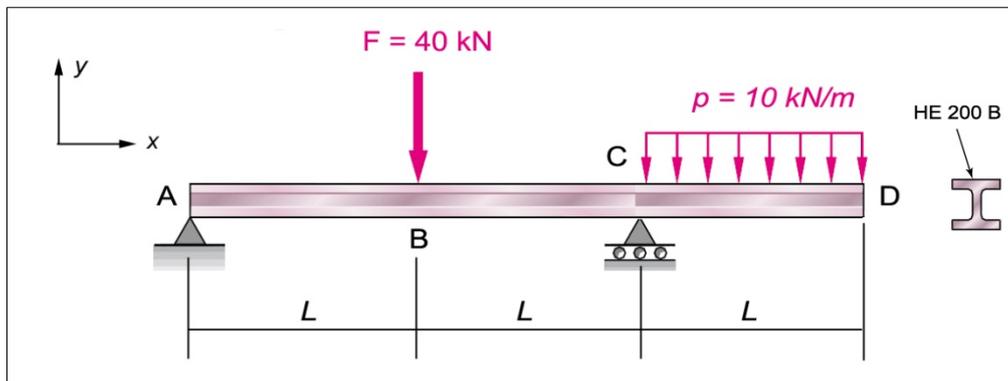
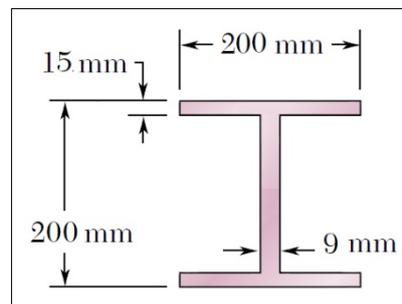


Figura 4.1

La struttura è realizzata attraverso una trave a doppio T (HE200 B) la cui sezione è illustrata in figura 4.2:



$$W = 5,696 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$$

Figura 4.2

Il materiale della trave è un acciaio da costruzione generale (S235JR). Per la tensione di snervamento del materiale si considera una distribuzione di probabilità di tipo gaussiano con un valor medio pari a  $\bar{\sigma}_s = 235 \text{ MPa}$  ed un coefficiente di variazione ipotizzato pari a  $V_{\sigma_s} = 0,08$ .

Il carico concentrato di tipo deterministico è pari a  $F = 40 \text{ kN}$ .

Il carico distribuito è di tipo aleatorio e presenta anch'esso una distribuzione di probabilità di tipo gaussiano con un valore medio  $\bar{p} = 10 \text{ kN/m}$  ed un coefficiente di variazione ipotizzato pari a  $V_p = 0,2$ .

La lunghezza totale della trave è pari a 9 m ed ogni singolo tratto  $L$  è lungo 3 m.

### 4.3 Calcolo delle sollecitazioni agenti

La prima operazione è determinare l'andamento delle sollecitazioni all'interno della trave per valutare successivamente lo stato di tensione agente su di essa.

L'andamento delle sollecitazioni può essere determinato attraverso il principio di sovrapposizione degli effetti analizzando prima la struttura caricata dalla sola forza concentrata  $F$  e poi caricata dal solo carico distribuito di tipo  $p$ .

#### Forza concentrata $F$

Si considera la trave caricata dalla sola forza concentrata  $F$  (figura 4.3). Si sostituiscono ai vincoli le generiche reazioni esplicitate ed attraverso le equazioni cardinali della statica si ricava:

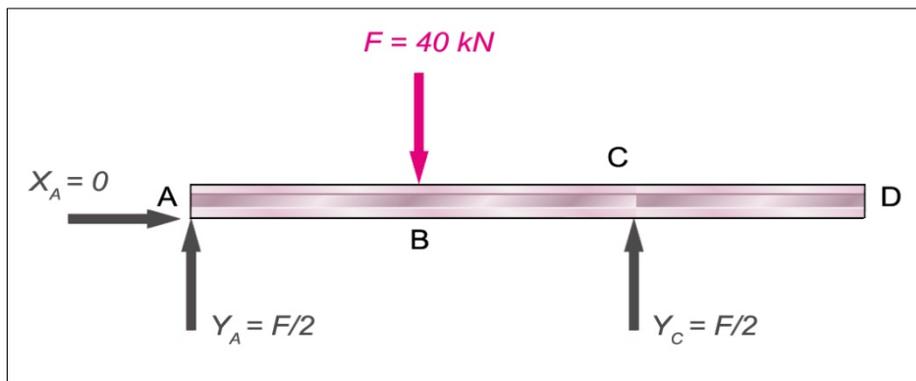


Figura 4.3

$$\begin{cases} \sum F_X = 0 & \rightarrow & X_A = 0 \\ \sum F_Y = 0 & \rightarrow & Y_A = \frac{F}{2} \\ \sum M_A = 0 & \rightarrow & Y_C = \frac{F}{2} \end{cases}$$

Si determina quindi l'andamento delle sollecitazioni andando a risolvere il sistema formato dalle equazioni indefinite di equilibrio con le opportune condizioni al contorno:

$$\begin{cases} N' = 0 \\ T' + p = 0 \\ M' - T = 0 \end{cases}$$

Di seguito si riportano gli andamenti del taglio (T) e del momento flettente (M) nei vari tratti.

Tratto  $\overline{AB}$ 

$$T_{AB} = -\frac{F}{2}$$

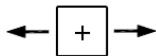
$$M_{AB} = -\frac{F}{2}x$$

Tratto  $\overline{BC}$ 

$$T_{BC} = +\frac{F}{2}$$

$$M_{BC} = -\frac{F}{2}L + \frac{F}{2}x$$

In figura 4.4 e 4.5 si riportano i grafici dell'andamento del taglio e del momento flettente. La convenzione utilizzata per i segni è la seguente:

Sforzo Normale (N) 

Sforzo di Taglio (T) 

Momento Flettente (M) 

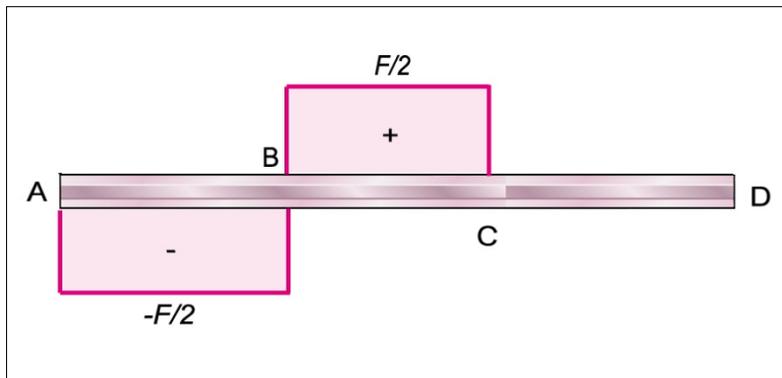


Figura 4.4

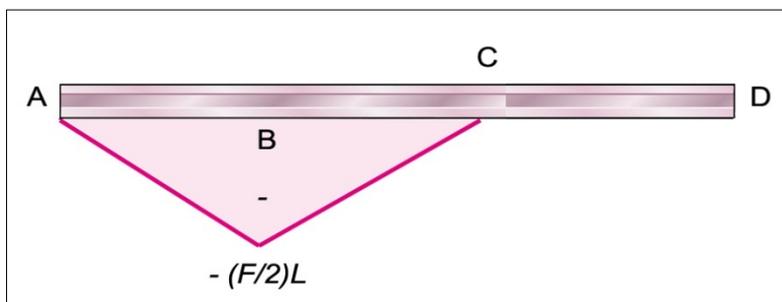


Figura 4.5

### Carico distribuito $p$

Si considera la trave caricata dal solo carico distribuito  $p$  (figura 4.6). Si sostituiscono ai vincoli le generiche reazioni esplicitate ed attraverso le equazioni cardinali della statica si ricava:

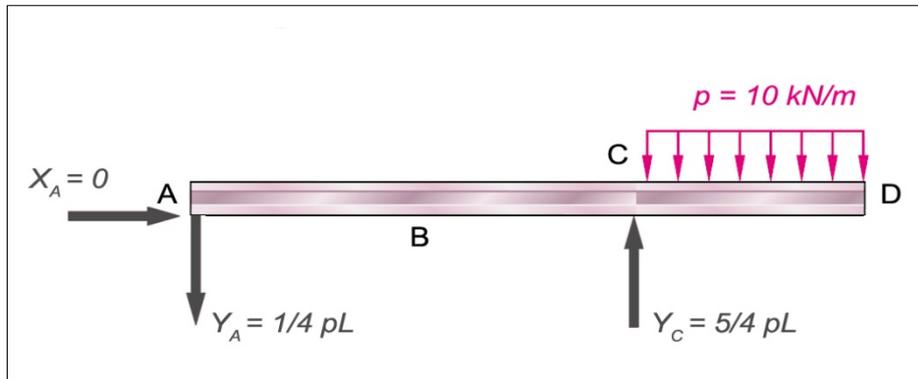


Figura 4.6

$$\begin{cases} \sum F_X = 0 & \rightarrow & X_A = 0 \\ \sum F_Y = 0 & \rightarrow & Y_A = \frac{1}{4} pL \\ \sum M_A = 0 & \rightarrow & Y_C = \frac{5}{4} pL \end{cases}$$

Si determina quindi l'andamento delle sollecitazioni andando a risolvere il sistema formato dalle equazioni indefinite di equilibrio con le opportune condizioni al contorno:

$$\begin{cases} N' = 0 \\ T' + p = 0 \\ M' - T = 0 \end{cases}$$

Di seguito si riportano gli andamenti del taglio (T) e del momento flettente (M) nei vari tratti.

Tratto  $\overline{AC}$

$$T_{AC} = \frac{1}{4} pL$$

$$M_{AC} = \frac{1}{4} pLx$$

Tratto  $\overline{CD}$

$$T_{CD} = -pL + px$$

$$M_{CD} = \frac{1}{2} pL^2 - pLx + p \frac{x^2}{2}$$

In figura 4.7 e 4.8 si riportano i grafici dell'andamento del taglio e del momento flettente. La convenzione utilizzata per i segni è la seguente:

Sforzo Normale (N) 

Sforzo di Taglio (T) 

Momento Flettente (M) 

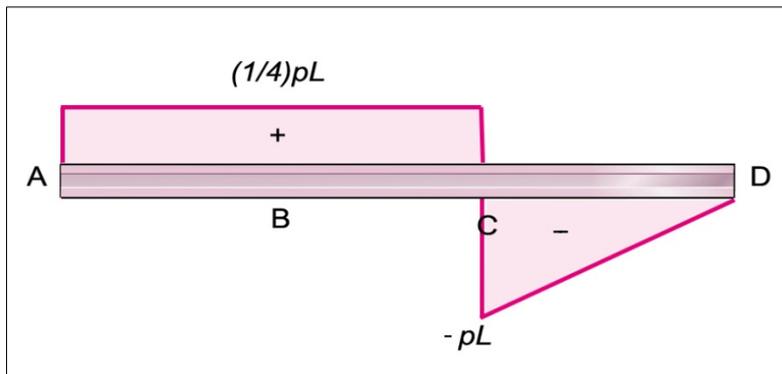


Figura 4.7

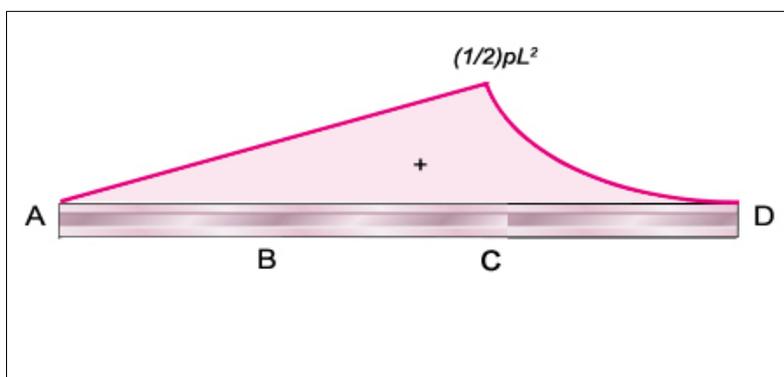


Figura 4.8

### Sovrapposizione degli effetti

Sommando gli andamenti del taglio e del momento trovati precedentemente si ricavano gli andamenti delle sollecitazioni nella struttura in esame (figure 4.9 e 4.10).

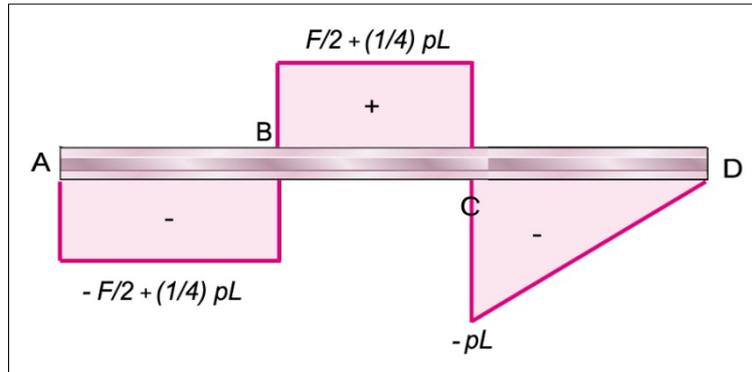


Figura 4.9

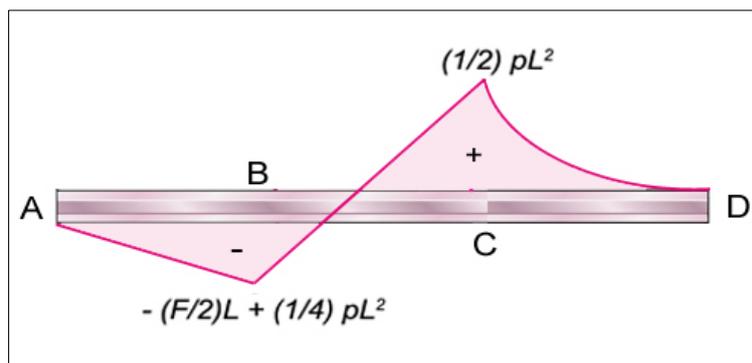


Figura 4.10

Si determina che la sezione più sollecitata è il punto C dove il momento flettente assume un valore pari a:

$$M_C = \frac{1}{2}pL^2 = -45000 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Nelle verifiche strutturali che seguiranno verrà preso in esame proprio tale punto.

#### 4.4 Metodo deterministico (Livello 0)

Attraverso il metodo deterministico si confronta la tensione di snervamento del materiale con la massima tensione agente sulla sezione più sollecitata della struttura. Da tale confronto si ricava il coefficiente di sicurezza della struttura.

Il momento d'inerzia  $I$  della sezione della trave a doppio T rispetto all'asse neutro della flessione ed il suo modulo di resistenza  $W$  sono pari a:

$$I = 5,696 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4 \qquad W = 5,696 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$$

Si può quindi calcolare la  $\sigma_{max}$  nel punto maggiormente sollecitato (punto C):

$$\sigma_{max} = \frac{M_C}{W} = \frac{M_{max}}{W} = \frac{45000}{0,0005696} = 79 \text{ Mpa}$$

Di seguito si ricava il coefficiente di sicurezza rispetto al valore medio della tensione di snervamento del materiale  $\bar{\sigma}_s = 235 \text{ MPa}$ .

$$\gamma = \frac{\bar{\sigma}_s}{\sigma_{max}} = \frac{235}{79} = 2,97 \cong 3$$

#### 4.5 Metodo semi-probabilistico (Livello 1)

Adottando il metodo semi-probabilistico si introducono i valori  $R_k$  ed  $S_k$  rispettivamente della resistenza e della sollecitazione, detti valori di calcolo, i quali devono essere opportuni frattili (inferiore e superiore) delle corrispondenti grandezze aleatorie. Essi vengono così definiti:

$$\text{Prob} [ R < R_k ] = K' = 0,05$$

$$\text{Prob} [ S > S_k ] = K'' = 0,05$$

Il valore  $K$  detto ordine del frattile è di solito di qualche unità percento. Nelle norme italiane è  $K' = K'' = 5\%$ .

Nella pratica, siccome il campione di misure non è mai abbastanza grande, si preferisce utilizzare, quando si può fare una fondata ipotesi sulla legge di distribuzione della variabile aleatoria, le seguenti relazioni:

$$R_k = \bar{\sigma}_s - k S \sigma_s$$

$$S_k = \bar{\sigma}_{\max} + k S \sigma_{\max}$$

dove  $k$  è un coefficiente che dipende dall'ordine del frattile  $K$ , dall'errore statistico sul valore medio, dalla deviazione standard e dalla legge di distribuzione: per una distribuzione gaussiana con un  $K=5\%$ , si ha un coefficiente  $k = 1,64$ . Con i termini  $S\sigma_s$  ed  $S\sigma_{\max}$  si indicano rispettivamente la deviazione standard della tensione di snervamento e la deviazione standard della massima tensione agente sulla struttura.

Per la determinazione di  $S_k$  occorre valutare l'andamento della tensione  $\sigma_{\max}$  in funzione del carico applicato, il quale per la presenza del carico distribuito  $p$ , ha anch'esso carattere aleatorio:

$$M_{\max} = \frac{1}{2} p L^2 = 4,5 p \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{4,5 p}{5,696 \cdot 10^{-4}} = 0,0079 p \text{ Mpa}$$

Si evince che la tensione  $\sigma_{\max}$  è anch'essa una funzione linearmente dipendente da  $p$  e poiché quest'ultimo ha una distribuzione gaussiana, anche la tensione  $\sigma_{\max}$  presenta la stessa distribuzione.

Si procede quindi al calcolo del valor medio e della deviazione standard della tensione:

$$\bar{\sigma}_{max} = 0,0079 \cdot \bar{p} = 0,0079 \cdot 10 \cdot 10^3 = 79 \text{ Mpa}$$

$$s_{\sigma_{max}} = V_p \cdot \bar{\sigma}_{max} = 0,2 \cdot 0,0079 \cdot \bar{p} = 0,2 \cdot 79 = 15,8 \text{ Mpa}$$

Mentre per il valor medio e la deviazione standard della tensione  $\sigma_s$  abbiamo:

$$\bar{\sigma}_s = 235 \text{ Mpa}$$

$$s_{\sigma_s} = V_{\sigma_s} \cdot \bar{\sigma}_s = 0,08 \cdot 235 = 18,8 \text{ Mpa}$$

Si calcolano ora i valori  $R_k$  ed  $S_k$ :

$$R_k = \bar{\sigma}_s - k S_{\sigma_s} = 235 - (1,64 \cdot 18,8) = 204 \text{ Mpa}$$

$$S_k = \bar{\sigma}_{max} + k S_{\sigma_{max}} = 79 + (1,64 \cdot 15,8) = 105 \text{ Mpa}$$

Ad essi si applicano successivamente i coefficienti di sicurezza parziali  $\gamma_m$  e  $\gamma_f$  (prefissati dalle normative per strutture in acciaio) per ottenere rispettivamente i valori di calcolo  $R^*$  ed  $S^*$ :

$$R^* = \frac{R_k}{\gamma_f} = \frac{204}{1,2} = 170 \text{ Mpa}$$

$$S^* = S_k \cdot \gamma_m = 79 \cdot 1,2 = 126 \text{ Mpa}$$

Poiché il valore della sollecitazione  $S^*$  risulta minore del valore della resistenza  $R^*$  si può affermare che la struttura è in grado di resistere al carico a cui è stata sottoposta.

A livello qualitativo si riportano i risultati ottenuti in figura 4.11.

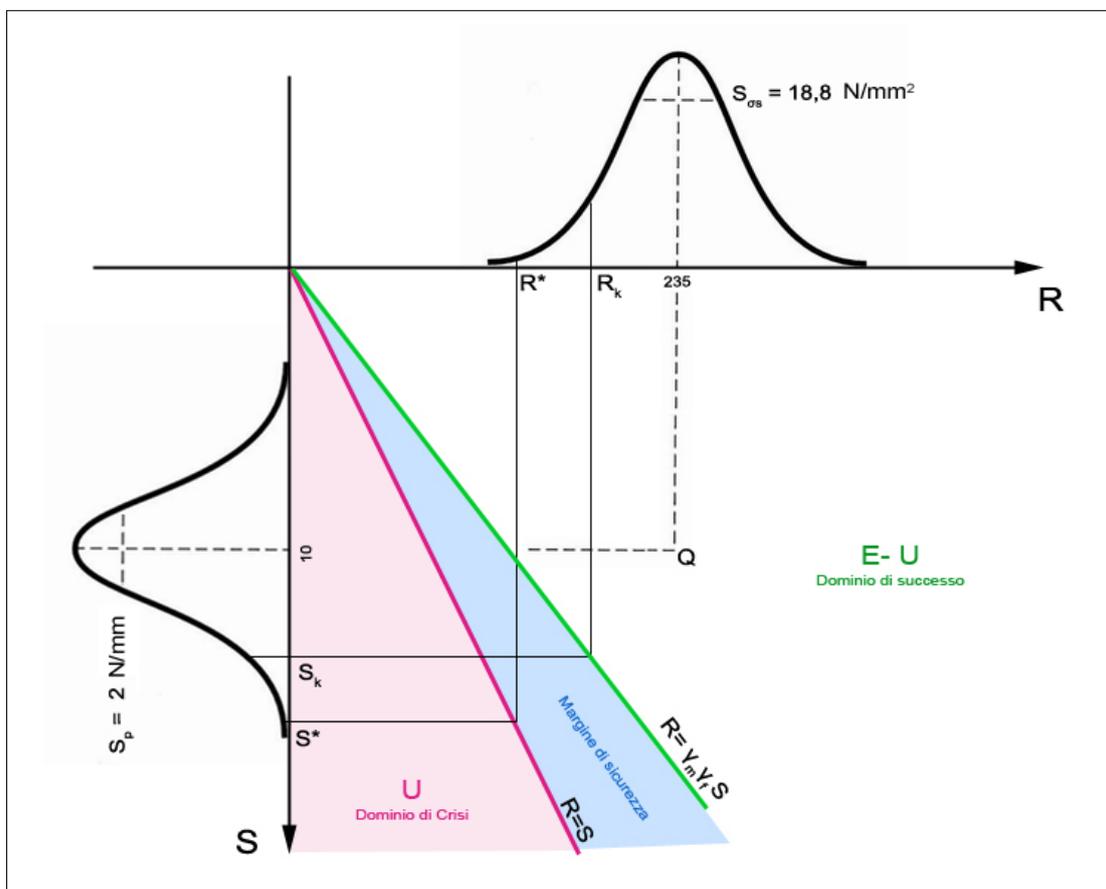


Figura 4.11

Il punto indicato con Q rappresenta l'intersezione tra il valore medio della R e della S ed è sufficientemente lontano dalla retta  $R=S$ , al di sotto della quale la struttura non risulterebbe sicura. Si evidenzia inoltre che l'intersezione tra  $R_k$  ed  $S_k$  non si trova al di sotto della suddetta retta, cioè assicura la sicurezza della struttura anche quando la resistenza e la sollecitazione assumono rispettivamente il valore minimo e il valore massimo compatibili con il frattile assegnato.

In definitiva il procedimento operativo di verifica al primo livello probabilistico risulta formulato in termini puramente deterministici lasciando l'elaborazione statistica a monte della determinazione dei valori  $R_k$  ed  $S_k$ . Questa cosa rende tale metodo saldabile alle procedure attuali e ne agevola l'introduzione nell'uso corrente.



#### 4.6 Metodo probabilistico (Livello 2)

La probabilità di crisi di una struttura  $P_{fail}$  secondo il metodo probabilistico è calcolata attraverso il seguente integrale esteso al dominio di crisi U:

$$P_{fail} = \iint_U f(R,S) dR dS$$

essendo  $f(R,S)$  la probabilità congiunta delle due variabili aleatorie indipendenti R ed S.

L'obiettivo del metodo probabilistico è mantenere la probabilità di crisi  $P_{fail}$  sufficientemente piccola. Tale risultato si ottiene mantenendo il punto Q che ha per coordinate i valori medi di R ed S (vedi figura 4.11) sufficientemente distante dalla frontiera di crisi delimitata dalla retta  $R=S$ . Tale distanza è misurata attraverso un indice di sicurezza  $\beta$ . Tanto più grande è tale indice, tanto più piccola è la  $P_{fail}$ .

Supponendo che la relazione tra  $\beta$  e  $P_{fail}$  sia unica e nota, fissare  $P_{fail}$  equivale a scegliere un valore di  $\beta$ . Tale metodo si basa sull'ipotesi di unicità di questa relazione. Nelle applicazioni di solito si ipotizza che le grandezze in gioco siano distribuite secondo una distribuzione gaussiana.

Per semplificare il calcolo si introduce una nuova variabile aleatoria Z, detta funzione esito, la quale, se le variabili aleatorie sono tra loro indipendenti, si può definire nel seguente modo:

$$Z = R - S = \sigma_s - \sigma_{max}$$

Questa funzione distingue la zona di crisi U da quella di successo:

$$\begin{cases} Z < 0 & (crisi) \\ Z > 0 & (successo) \end{cases}$$

L'indice di sicurezza  $\beta$  può essere definito facendo ricorso proprio alla funzione esito Z, indicando con  $\bar{Z}$  il suo valor medio e con  $s_z$  la sua deviazione standard:

$$\bar{Z} - \beta s_z = 0$$

Nel nostro caso abbiamo:

$$\bar{Z} = \bar{R} - \bar{S} = 235 - 79 = 156 \text{ Mpa}$$

$$s_z = \sqrt{s_{\sigma_s}^2 + s_{\sigma_{max}}^2} = \sqrt{18,8^2 + 15,8^2} = 24,56 \text{ Mpa}$$

$$\beta = \frac{\bar{Z}}{s_z} = \frac{156}{24,56} = 6,35$$

L'indice  $\beta$  risulta più facile da determinare rispetto alla soluzione dell'integrale della probabilità congiunta di R ed S, in particolar modo se queste ultime non avessero una distribuzione normale della probabilità. Se invece la distribuzione di Z è nota, ed in particolare è normale, ad ogni valore di  $\beta$  corrisponde un determinato valore del rischio  $P_{fail}$ .

Nella tabella 4.1 si riportano alcuni valori ripresi dalle tabelle di distribuzione normale che indicano il rischio  $P_{fail}$  corrispondente ai vari valori dell'indice di sicurezza  $\beta$  per funzione esito Z normalmente distribuita:

$P_{fail}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$	$10^{-7}$	$10^{-8}$	$10^{-9}$
$\beta$	2,32	3,09	3,72	4,27	4,75	5,20	5,61	6,00

Tabella 4.1

Nel caso in esame  $\beta = 6,35$  e l'utilizzo della tabella 4.1 non permette il calcolo esatto del rischio di crisi, ma poiché (anche se la legge di distribuzione non è nota) le code di qualsiasi distribuzione continua possono essere assimilate ad una funzione esponenziale, la probabilità di crisi  $P_{fail}$  può essere anche calcolata attraverso la seguente relazione:

$$P_{fail} = 460 e^{-4,3 \beta} = 6,37 \cdot 10^{-10}$$

La struttura presa in esame possiede quindi una probabilità di crisi molto bassa.

Si fa notare inoltre che non è possibile mettere in relazione con questo metodo il valore del rischio di crisi  $P_{fail}$  con i coefficienti di sicurezza prescritti dalle normative, infatti il rischio di crisi  $P_{fail}$ , come si è visto, dipende da altri parametri. In questo caso in fase di progettazione si parlerà di ordine del rischio. Se si vuole operare con un  $P_{fail}$  dell'ordine di  $10^{-4}$  si prescriverà quindi un  $\beta > 3,72$  (vedi tabella 4.1).

Concludendo il  $P_{fail}$  consente razionali confronti tra diverse alternative, preferendo, a parità di condizioni, quelle con un ordine di grandezza del rischio superiore, cioè quelle più "sicure" rispetto alle altre.

## ||| Bibliografia:

### 1. Strutture di elementi monodimensionali intelaiati

A. Carpinteri

*"Scienza delle Costruzioni 2"*

Pitagora Editrice Bologna

### 2. Instabilità dell'equilibrio elastico

A. Carpinteri

*"Scienza delle Costruzioni 2"*

Pitagora Editrice Bologna

M. Pignataro, N. Rizzi, A. Luongo

*"Stabilità, biforcazione e comportamento postcritico delle strutture elastiche"*

E.S.A. Editrice

### 3. Elementi strutturali bidimensionali

A. Carpinteri

*"Scienza delle Costruzioni 1"*

Pitagora Editrice Bologna

O. Belluzzi

*"Scienza delle Costruzioni" Volume 3*

Zanichelli Editrice

### 4. Metodi probabilistici per le verifiche strutturali

G. Augusti

*"Metodi probabilistici nell'Ingegneria Strutturale"*

Estratto dal Bollettino degli Ingegneri 1976